Economie en techniek

Verheyen, P.A.

Publication date:
1962

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

ECONOMIE EN TECHNIEK

P. A. VERHEYEN

ECONOMIE EN TECHNIEK

ECONOMIE EN TECHNIEK

Beschouwingen over de technische coëfficiënten, de groeifactor en het kapitaalrendement in de theoretische economie

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN AAN DE KATHOLIEKE ECONOMISCHE HOGESCHOOL TE TILBURG, OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS DR. M. G. PLATTEL O.P., HOOGLERAAR IN DE SOCIALE WIJSBEGEERTE, SOCIALE ETHIEK EN GESCHIEDENIS DER WIJSBEGEERTE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG 24 MEI 1962 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

door

PETRUS ANTONIUS VERHEYEN
Geboren te Alphen (N.-Br.)

Promotor: Professor Dr. D. B. J. Schouten

Aan mijn Ouders
Aan mijn Vrouw

W O O R D   V O O R A F

Na de voltooiing van dit proefschrift wil ik allen die in mijn vorming en scholing een aandeel hebben gehad, danken.
Op de eerste plaats noem ik dan de Hoogleraren, Lectoren en Docenten van de Katholieke Economische Hogeschool, die leiding hebben gegeven aan mijn wetenschappelijke vorming. Ik ben dan ook zeer verheugd, dat ik mijn proefschrift aan deze Hogeschool mag verdedigen.
Vooral ben ik mijn promotor Professor Dr. D.B.J. Schouten erkentelijk. Zowel door zijn colleges als door de hulp bij de voorbereidingen van mijn proefschrift heeft hij mijn denken sterk beinvloed; dat hij bereid is geweest als mijn promotor op te treden, stel ik op hoge prijs.
Professor Dr. J.J.J. Dalmulder dank ik met name voor de econometrische opleiding, welke ik van hem heb mogen genieten. In zijn colleges heeft hij mij de weg gewezen naar de wiskundig-economische studies, welke aan de door mij ontworpen modellen ten grondslag liggen.
Dank betuig ik ook aan de Hoofddirectie van de Staatsmijnen in Limburg en aan de leiding van de Economische, Financiële en Administratieve Sector van dit bedrijf. Zonder de positieve instelling van deze instanties ten opzichte van mijn verdere theoretisch-economische studie, was het schrijven van dit proefschrift niet mogelijk geweest.
Tenslotte heb ik bij de opzet en de uitwerking van mijn dissertatie van vele persoonlijke vrienden steun ondervonden. Het medeleven van de heren Drs. G.J. Engelen en Drs. Th.C.M.J. van de Klundert en van mijn collegae van de Afdeling Statistiek van de Staatsmijnen in Limburg,heeft mij over vele moeilijkheden heen geholpen. De steun van de heren J.A.A. Tonnaer en Drs. J.H. Timmermans bij het samenstellen van de eindredactie heeft mijn werk in de laatste maanden verlicht. Hun allen ben ik daarvoor erkentelijk.

Oprecht dankbaar ben ik ook voor de bijstand welke de Zeereerwaarde Heer W.J.C. Binck en de Hooggeleerde Heer Dr. H.J.C.M.G. Ruygers mij destijds hebben gegeven bij het nemen van een beslissing, welke een keerpunt in mijn leven betekende. De nieuwe weg, door hen

gewezen, heb ik gevolgd. Ik hoop dat zij door dit proefschrift in hun mening gesterkt mogen zijn, dat zij mij inderdaad een in alle opzichten goede raad hebben gegeven.

Voor alles wat mijn ouders en mijn vrouw voor mij deden en wat in feite ver uitgaat boven mijn wetenschappelijke vorming alleen, kan ik hen wel het beste danken, door juist aan hen dit proefschrift op te dragen.

INHOUD

INLEIDING

In de economische literatuur wordt een analyse gegeven van de betrekkingen tussen economische grootheden. Het doel hiervan is de handelingen, welke de economische subjecten in het economische proces stellen, in hun samenhang te verklaren. Sommige analyses geven een meer algemene, globale verklaring van deze handelingen, andere gaan meer in detail op één punt in. Ook qua methode is de opzet zeer verschillend: men treft sterk verbaal gekleurde analyses en streng mathematisch geformuleerde studies naast elkaar aan. Omdat er in de publikaties welke op economisch gebied verschijnen, zo'n grote verscheidenheid is in bestudeerd object en gevolgde methode, moet degene, die een nieuwe bijdrage tot de theorie wil leveren, het object en de methode van zijn studie nauwkeurig omschrijven.
In de onderhavige studie is de methode gevolgd welke door Schouten in Nederland is geintroduceerd[1]. Enkele mathematisch geformuleerde artikelen, gepubliceerd o.a. in het tijdschrift "Econometrica", worden "vertaald" in de symbolen en formuleringen van "Exacte Economie". Zo is het, zoals zal blijken, mogelijk de analyse van Schouten aan te vullen met enkele conclusies betreffende de technische relaties van het produktieproces, de groeifactor in de economie van een volkshuishouding en het rendement van kapitaal. Tevens worden dan mathematisch geformuleerde stellingen van diverse schrijvers verduidelijkt voor hen, wier denken niet zo sterk wiskundig is gericht.
Ter omschrijving van het onderwerp van deze studie moeten de abstracties worden aangegeven, welke op het object van de economie worden toegepast. In het algemeen bestudeert de economische theorie de betrekkingen tussen economische grootheden om aldus een verklaring te kunnen geven van de economische handelingen en de samenhang daartussen. Deze handelingen zijn gericht op het bereiken van maximale welvaart. Twee belangrijke en van elkaar afhankelijke grootheden, welke de welvaart bepalen, zijn de totale produktie van goederen en de verdeling van deze goederen over de

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, Leiden 1957.

economische subjecten. Alleen de produktie wordt in deze analyse nader bestudeerd en dan nog alleen voor wat de daaraan ten grondslag liggende technische relaties betreft.
De nadruk zal dus vallen op de technische achtergrond van het produktieproces. Nagegaan zal worden hoe de grootte van de produktiecoëfficiënten en de mate van interne leveringen tussen de industrieën, invloed hebben op de voortbrenging van goederen, op de prijzen dezer goederen en op de groei van het nationale inkomen. Dat daarmee tevens de verdeling van die goederen, welke voor de eigenlijke produktiefactoren bestemd zijn, over de categorieën arbeid en kapitaal economisch bepaald is, zal later blijken. Hierbij blijft de economische verklaring van de monopoliewinst buiten beschouwing.
De produktie kan bestaan uit consumptiegoederen en investeringsgoederen. Consumptiegoederen worden direct verbruikt; investeringsgoederen dienen voor vergroting van het aantal kapitaaleenheden en dus van de toekomstige produktiecapaciteit van de volkshuishouding. Zeker zal als deze vergroting van de kapitaalgoederenvoorraad samengaat met een toename van het arbeidspotentieel, het nationale inkomen stijgen zelfs bij een gelijke stand van het technisch kunnen. De keuze tussen de voortbrenging van consumptie- en investeringsgoederen bepaalt daarom in belangrijke mate of de nationale bestedingen in de toekomst hoger kunnen zijn. In vele m.n. mathematisch gedefinieerde groeitheorieën wordt daarnaast terecht de nadruk gelegd op de invloed van de stand van de techniek op de groei van het nationaal inkomen. Het is immers zonder meer duidelijk dat een gunstige input-output verhouding, als resultante van een ontwikkeld technisch kunnen, het effect van de inschakeling van arbeid en van de produktie van investeringsgoederen gunstig beïnvloedt. De toename van het nationaal inkomen wordt derhalve mede door technische factoren beïnvloed. In deze studie zal ook dit verband tussen techniek en economische groei aan de orde komen.
De groei van het nationaal inkomen is in reële grootheden te meten, maar ook in geld. Bij deze laatste benadering speelt het rendement van kapitaal een grote rol: alleen als nieuwe kapitaalgoederen winstgevend worden geacht, komen investeringen tot stand. Dan alleen nl. zullen liquide middelen aangewend worden om uitbreiding van de kapitaalgoederenvoorraad mogelijk te maken. Dat ook het rendement van het kapitaal sterk samenhangt met de technische relaties is duidelijk, als men overdenkt, dat de winstge-

vendheid van de nieuwe investeringen voor een belangrijk deel afhangt van de input-output verhoudingen in het produktieproces. Samenvattend kan dus gesteld worden dat deze studie zich in eerste instantie richt op de technische structuur van de produktie. Deze structuur wordt geanalyseerd met behulp van de technische coëfficiënten van de produktiefactoren en die van de interne leveringen tussen de industrieën. Op basis van deze analyse wordt een prijstheorie ontwikkeld en worden de voorwaarden voor een evenwichtige groei van het nationaal inkomen systematisch weergegeven. In de prijstheorie wordt het rendement van kapitaal centraal gesteld.

Kan de technische achtergrond van de produktie onderwerp zijn van een economische analyse? De technische kennis is voor de economist immers een gegeven, de aard van het produktieproces een ervaringsregel[1].
Als inderdaad de omzetting van arbeid en kapitaal in eindprodukten louter afhankelijk zou zijn van technische data, was een economische analyse niet mogelijk, omdat er eenvoudig geen economische alternatieven zouden zijn. Bij de bepaling van de optimale kwantitatieve verhouding van de in te schakelen produktiemiddelen blijft er echter steeds, na de vaststelling der technische data, een economische keuzeprobleem. Daarom is naast het technisch onderzoek economische analyse nodig om vraagstukken van substitutie tussen kapitaal en arbeid met behulp van een kostenanalyse tot oplossing te brengen.
Het economisch onderzoek vult de technische research aan m.n. in bedrijfseconomische problemen. Het is echter niet zo dat de economische analyse dan los staat van het technische. In één onderzoek worden beide opgenomen. De economische analyse zal hierbij steunen op technische relaties.
Terwijl men dit micro-economisch een voor de hand liggende bewering vindt, laat men in de macro-economie, om overigens wel te begrijpen redenen, deze technische relaties vaak buiten beschouwing."Vandaar het teleurstellend verschijnsel, dat de macro-economie weinig of niets kan beweren over de ontwikkeling van de

1) F.J. de Jong, De werking van een Volkshuishouding, Leiden 1953, Deel I, par. 2.

prijzenstructuur en evenmin over de doelmatige allocatie van produktiefactoren"[1].
Indien de economist, hetzij impliciet hetzij expliciet, de technische relaties wèl opneemt in zijn analyse, moet een hypothese worden gemaakt over het functionele verband tussen de hoeveelheden van de ingeschakelde produktiefactoren en de daaruit resulterende hoeveelheid eindprodukt. Hierbij veronderstelt men dat de produktie al of niet proportioneel stijgt met de inschakeling van de produktiefactoren, of anders gezegd, dat de meeropbrengst per toegevoegde eenheid arbeid c.q. kapitaal al of niet constant is. De keuze van het uitgangspunt betreffende de produktiviteit is voor de uitbouw van de theorie van grote invloed, want de economische theorie kan alleen al hierdoor tot bepaalde conclusies worden gebracht. Daarom bestaat behoefte aan een nadere beschouwing omtrent technische relaties, om aldus te onderzoeken, in hoeverre een bepaalde economische theorie van deze hypothese afhankelijk is.

De analyse kan zich richten op de technische structuur binnen één bedrijf (micro-economisch) en op de technische relaties in én tussen de industrieën (macro-economisch). Zowel de micro- als de macro-economische analyse kan theoretisch en praktisch worden uitgevoerd.
In de micro-economische analyse van de technische structuur staat, zowel theoretisch als praktisch, het produktiviteitsonderzoek op de voorgrond. In het bedrijf vindt de omzetting plaats van produktiefactoren in eindprodukten c.q. halffabrikaten, die na verkoop hun weg vinden naar een consument of naar een ander bedrijf. Deze omzetting geschiedt in het ene bedrijf op meer efficiente, meer produktieve wijze dan in het andere. Dit is van grote invloed op de winst. Daarom is het begrijpelijk, dat het produktiviteitsonderzoek in de bedrijfseconomie zo sterk op de voorgrond staat. Dit komt zowel in theoretische beschouwingen over de aard van de produktiviteit (o.a. learning curve) als in praktische vragen over investeringen tot uiting.
Niet alleen bij het bedrijfseconomische produktiviteitsonderzoek maar ook in de algemene economie worden de technische relaties

1) D.B.J. Schouten, Theoretische beschouwingen over de gedifferentieerde loon- en prijsvorming, Maandschrift Economie, 1960, p. 7.

bestudeerd. Met name als gevolg van de input-output tabellen van Leontief, waarin de technische structuur van bedrijfstakken wordt weergegeven, is meer aandacht aan deze problemen geschonken. Deze aandacht richtte zich enerzijds op praktisch econometrisch werk, anderzijds op meer theoretisch onderzoek. In beide richtingen werden grote vorderingen gemaakt.
In deze studie zullen echter noch de bedrijfseconomisch, noch de econometrische beschouwingen nader geanalyseerd worden, maar zal een theoretische economische analyse worden gegeven. Deze analyse steunt op de geschriften en colleges van Prof. Dr. D.B.J. Schouten en op enkele wiskundig-economische artikelen. Het doel is de stellingen uit deze publikaties te groeperen, in een eenvoudig wiskundige vorm weer te geven en te voorzien van enkele, economisch gefundeerde conclusies. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de methoden van de wiskundige economie, omdat in deze vorm de theses en uitwerkingen vaak in eenvoudige symbolen zijn samen te vatten en de methode van redeneren kort en exact kan zijn. Het is echter niet de bedoeling een specifiek mathematische verhandeling op te stellen: de wiskundige symbolen zullen alleen worden gebruikt om de stellingen af te leiden. De conclusies zullen steeds zo veel mogelijk verbaal worden weergegeven.

Zoals in het voorafgaande reeds is aangegeven zal vooral de technische structuur bestudeerd worden. Deze analyse van de technische structuur van de produktie, alsook de analyse van de groeifactor en het rendement van het kapitaal zijn echter niet mogelijk zonder nadere gegevens over de produktiefactoren en de eindprodukten. Om de aandacht niet af te leiden van de technische aspecten van de economische theorie, zullen in deze studie de veronderstellingen over de produktiefactoren en de eindprodukten eenvoudig worden gehouden.
Het uitgangspunt is, dat de volkshuishouding twee homogene produktiefactoren kent t.w. arbeid (l) en kapitaal (k), terwijl de vraag naar eindprodukten consumptie- (c) en investeringsgoederen (i) omvat.
De hoeveelheid arbeid en kapitaal, welke wordt aangeboden in de beginsituatie (t=0), is gegeven in reële eenheden. Zo kan bijvoorbeeld ten tijde t=0 de beschikbare hoeveelheid arbeid ($\bar{l}$) gelijk zijn aan 10 eenheden en de beschikbare hoeveelheid kapitaal ($\bar{k}$) aan 20 eenheden. Deze produktiefactoren worden in het produktieproces ingeschakeld, ter voortbrenging van een bepaalde hoeveelheid

c- en i-goederen. Hoeveel in feite netto geproduceerd wordt, is afhankelijk van de produktiviteit van arbeid en kapitaal, van de grootte van de interne leveringen tussen de industrieën en van de hoeveelheid arbeid en kapitaal, welke beschikbaar is. Hoeveel arbeids- en kapitaaleenheden van de beschikbare hoeveelheid ingeschakeld worden, d.w.z. hoe groot de gevraagde hoeveelheid arbeid (l) c.q. kapitaal (k) is, hangt mede af van de technische structuur. In een volkshuishouding, waarin de produktiehuishoudingen hun winst willen maximaliseren, zal de inschakeling van de beschikbare hoeveelheid $\bar{l}$ en $\bar{k}$ worden voortgezet totdat aan de voorwaarde van gelijke marginale geldproduktiviteit van de produktiefactoren is voldaan[1].
De veronderstellingen over de produktiefactoren zijn dus zeer eenvoudig. Ook de hypotheses betreffende de vraagfuncties zijn niet gecompliceerd. In het merendeel der te behandelen modellen wordt direct - in reële grootheden - gegeven, hoe de verhouding van de vraag naar c- en i-goederen is, zodat zelfs van prijsinvloeden wordt afgezien. Voor de totale vraag wordt gesteld, dat het gehele inkomen in dezelfde periode wordt besteed (wet van Say), zodat de volledige produktie door de vraag van consument en bedrijven wordt opgenomen.

Tenslotte moet, nu het onderwerp van deze studie zeer globaal is aangegeven en de hypotheses betreffende de produktiefactoren naar voren zijn gebracht, in deze inleiding nog in het kort op de gebruikte symbolen voor de technische structuur van het produktieproces en op de indeling van de studie worden ingegaan.

De symbolen voor de technische structuur kunnen onderscheiden worden in symbolen welke betrekking hebben op de produktiefactoren (produktiviteit van arbeid en kapitaal) en die, welke de structuur van de interne leveringen tussen de c- en i-industrie aangeven.
De produktiviteit van arbeid en kapitaal kan door verschillende symbolen worden weergegeven. Het gemakkelijkst kan men hier gebruik maken van "factorquoten" per eenheid eindprodukt nl. van de arbeidsquote ($\bar{\alpha}$) en de kapitaalquote ($\bar{\kappa}$).

1) B. Cameron, Input-Output Analysis, The Economic Record, mei 1954 pag. 33 e.v.

Voor de arbeidsquote geldt: $\bar{\alpha}$ = de hoeveelheid arbeid, die minimaal nodig is om één eenheid van een bepaald produkt voort te brengen, ($\bar{\alpha}_c$: om één eenheid van het consumptiegoed voort te brengen, $\bar{\alpha}_i$: om één eenheid van het investeringsgoed voort te brengen). De kapitaalquoten ($\bar{\kappa}_c$ en $\bar{\kappa}_i$) worden geheel analoog gedefinieerd. Worden nu bijvoorbeeld voor één consumptiegoed twee eenheden arbeid ($\bar{\alpha}_c = 2$) en drie eenheden kapitaal ($\bar{\kappa}_c = 3$) geeist, terwijl $\bar{l} = 10$ en $\bar{k} = 20$, dan is het mogelijk, met behulp van deze produktiefactoren en gegeven deze technische structuur, maximaal 5 consumptiegoederen te produceren, waarbij dan nog 5 eenheden kapitaal ongebruikt blijven.
Het is duidelijk dat de arbeidsquote de reciproke is van de arbeidsproduktiviteit. Deze wordt immers gedefinieerd als het aantal eindprodukten, dat door één eenheid arbeid kan worden voortgebracht. Hetzelfde verband geldt uiteraard voor de kapitaalquote en de produktiviteit van kapitaal.
Naast de factorquoten zijn ook de quoten van de onderlinge leveringen tussen de industrieen (materiaalquoten) technisch bepaald. Deze materiaalquoten (μ) geven aan, hoeveel eenheden van een bepaald produkt als materiaal nodig zijn om één consumptie- of investeringsgoed voort te brengen. Voor de produktie nl. van c- resp. i-goederen zijn naast arbeid en kapitaal ook materialen nodig. Deze materialen worden door de betreffende industrie zelf geproduceerd (bijvoorbeeld als voor c-produktie ook c als materiaal nodig is) of door een andere industrie (bijvoorbeeld i voor de c-produktie). In deze studie kan het materiaal bestaan uit c-goederen (μ_c) door de c-producent zelf geproduceerd en verbruikt (μ_{cc}: hoeveelheid c nodig voor de produktie van één eenheid c), uit c-goederen door de c-producent geleverd aan de i-producent en door deze laatste verbruikt (μ_{ci}: hoeveelheid c nodig voor de produktie van één eenheid i), of uit i-goederen (μ_{ic} en μ_{ii}).

De indeling van deze studie wordt nu bepaald door de verschillende hypotheses, welke aan de technische relaties ten grondslag kunnen worden gelegd. De hypothese met betrekking tot de technische quoten is nl. in elk hoofdstuk anders gekozen. Hierbij aansluitend treden dan tevens de opvattingen van verschillende economisten op de voorgrond, omdat zal blijken dat verschillende theorieën juist naar hun onderling afwijkende veronderstellingen over de techniek kunnen worden onderscheiden.
Uitgaande van vaste technische produktiecoëfficiënten zal in hoofd-

stuk I aandacht worden geschonken aan de systemen, welke gebaseerd zijn op complementariteit van de produktiefactoren in het produktieproces. Het eerst worden de statische en dynamische theorie van Leontief behandeld. Omdat, zoals zal blijken, de dynamische analyse van Leontief echter zeer stringente eisen stelt aan de verhouding, waarin de produktiefactoren arbeid en kapitaal beschikbaar moeten zijn, worden vervolgens ook meer algemene dynamische theorieën ontwikkeld en wel op basis van de veronderstellingen van Georgescu-Roegen en Dorfman-Samuelson-Solow. Hierna wordt een model gegeven, waarin de invloed van een autonome bevolkingsgroei nader wordt onderzocht.
In hoofdstuk II vinden de theorieën, welke uitgaan van meerdere produktietechnieken per produkt, behandeling. Na de statische theorie van Schouten en de dynamische theorieën van Von Neumann en Malinvaud, worden modellen met gedeeltelijke substitueerbaarheid van de produktiefactoren ontwikkeld, waarin bepaalde hypotheses van Marx en Walras zijn opgenomen.
In het laatste hoofdstuk (hoofdstuk III) zal het verband besproken worden tussen de theorieën van de hoofdstukken I en II. Worden nl. in de eerste twee hoofdstukken de modellen systematisch weergegeven, in dit laatste gedeelte van de studie zal telkens een aspect van alle modellen worden vergeleken. Hoofdstuk III geeft dus als het ware een dwarsdoorsnede om zo bepaalde samenhangen te laten zien. In dit hoofdstuk zullen dan m.n. de drie hoofdonderwerpen van deze studie, t.w. produktiequoten, groeifactor en rendement, zodanig worden bezien dat het mogelijk is na te gaan, hoe de hypotheses over complementariteit en substitueerbaarheid van produktiefactoren doorwerken in de conclusies.

HOOFDSTUK I

COMPLEMENTARITEIT IN HET PRODUKTIEPROCES

1. Inleiding

Een belangrijke stap in de analyse van de technisch-economische relaties is gezet door Leontief[1]. Hij heeft in input-output tabellen de onderlinge leveringen tussen een groot aantal industrietakken aangegeven en zo laten zien, hoe in een volkshuishouding de industrieën van elkaar afhankelijk zijn.
Als basis van deze praktische onderzoekingen is een theorie ontwikkeld, waarin t.a.v. de technische relaties verondersteld wordt, dat de factor- en materiaalquoten bij iedere produktie-omvang constant zijn. Dit impliceert complementariteit van de ingeschakelde produktiefactoren en de verbruikte materialen (voor elke hoeveelheid output is één bepaalde hoeveelheid van de produktiefactoren en de materialen nodig) alsmede een constante meeropbrengst.
Indien men, i.p.v. een groot aantal goederen, uitgaat van twee soorten consumptiegoederen (c_a en c_b) kan men stellen, dat, volgens de theorie van Leontief, elk van deze goederen wordt voortgebracht door een bepaalde hoeveelheid c_a en c_b (onderlinge levering) en een gegeven aantal arbeiders. Voor het produceren nl. van c_a en c_b is niet alleen de produktiefactor arbeid nodig, maar zijn ook hulpstoffen of halffabrikaten (materialen) vereist (c_a en c_b). Vergroting van een van deze factoren heeft geen verhoging van de produktie tengevolge (complementariteit), terwijl een verdubbeling van de input van alle factoren de produktie doet verdubbelen (constant return to scale).

---

1) Tj.C. Koopmans (ed), Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951, pag. 12.

In de literatuur ligt bij de bespreking van het begrip complementariteit vaak de nadruk op de vaste verhouding in de aanwending van meerdere produktiefactoren. In een theorie kan ook van complementariteit sprake zijn, indien naast één produktiefactor materiaal in het produktieproces gebruikt wordt. Men kan nl. van complementariteit spreken als er voor de vervaardiging van een bepaald eindprodukt maar één techniek bekend is. Dit houdt in dat er bij de vervaardiging van een eenheid van dit produkt altijd een vaste verhouding tussen de verschillende inputs zal bestaan. Dientengevolge is er ook in het statische model van Leontief complementariteit.
In het model van Leontief wordt gesteld, dat bepaalde goederen worden geproduceerd voor onderlinge levering en voor consumptie, dat de factor arbeid schaars is en dat de netto vraag naar goederen bekend is. In symbolen kan men dit model aldus formuleren:

$$\mu_{c_a c_a} \cdot c_a + \mu_{c_a c_b} \cdot c_b + c_{a\,netto} = c_a \qquad (1.1.1)^{1)}$$

$$\mu_{c_b c_a} \cdot c_a + \mu_{c_b c_b} \cdot c_b + c_{b\,netto} = c_b \qquad (1.1.2)$$

$$\bar{\alpha}_{c_a} \cdot c_a + \bar{\alpha}_{c_b} \cdot c_b = \bar{1} \qquad (1.1.3)$$

$$c_{a\,netto} = c_{b\,netto} \qquad (1.1.4)$$

Deze vergelijkingen geven het volgende weer:

(1.1.1): de totale produktie van c_a (rechter lid van de vergelijking) omvat de hoeveelheid c_a welke de c_a-industrie als materiaal nodig heeft ($\mu_{c_a c_a}$ = hoeveelheid c_a voor de c_a-industrie per eenheid c_a, dus $\mu_{c_a c_a} \cdot c_a$ = de hoeveelheid c_a voor de totale c_a-produktie), de levering van de c_a-industrie aan de c_b-industrie ($\mu_{c_a c_b}$ = de hoeveelheid c_a per eenheid c_b) en de hoeveelheid c_a welke voor consumptie beschikbaar is ($c_{a\,netto}$).

1) (1.1.1) = hoofdstuk 1, paragraaf 1, vergelijking 1.

(1.1.2): de geproduceerde c_b wordt gevraagd door de c_a-industrie, het eigen bedrijf en de consumenten.

(1.1.3): de beschikbare hoeveelheid arbeid ($\bar{l}$) wordt ingeschakeld in beide bedrijfstakken ($\bar{\alpha}_{c_a}$ = hoeveelheid arbeid per eenheid c_a; $\bar{\alpha}_{c_a} \cdot c_a$ = totale hoeveelheid arbeid voor de c_a-produktie; analoog geldt voor de c_b-industrie $\bar{\alpha}_{c_b}$ en $\bar{\alpha}_{c_b} \cdot c_b$).

(1.1.4): de vraagfunctie. Willekeurig is hier gekozen voor een situatie, waarin van beide eindprodukten dezelfde hoeveelheid wordt gevraagd.

Uit de vergelijkingen blijkt dat de materialen en de factor arbeid slechts in verhouding van $\mu_{c_a c_a}$, $\mu_{c_b c_a}$ en $\bar{\alpha}_{c_a}$ kunnen worden aangewend om een bepaalde hoeveelheid c_a voort te brengen (complementariteit). Bovendien levert een verdubbeling van de input van materialen c_a en c_b (onderlinge levering) en van de factor arbeid, in het produktieproces van c_a, een dubbele produktie van dit goed op. De veronderstelling van complementariteit, aangevuld met het begrip "constante meeropbrengst", is de basis van de theorie van Leontief. Zoals later zal blijken steunt hierop zijn theorie van de gecumuleerde quoten, van de prijsverhoudingen en van de schaarste. Door deze technische verhoudingen ontstaan echter ook de moeilijkheden, welke vooral in de dynamische theorie van Leontief naar voren komen. Bij de behandeling daarvan zal nl. blijken dat er volgens dit model in elke periode een bepaalde verhouding tussen arbeid en kapitaal moet bestaan, wil een groei à la Leontief mogelijk zijn. Deze moeilijkheden kunnen alleen opgelost worden als men bepaalde aanvullende veronderstellingen in de theorie opneemt. Deze oplossingen o.a. van Georgescu-Roegen en Dorfman c.s. zullen worden geanalyseerd, nadat het statische en dynamische model van Leontief besproken zijn.

2. Het statische model

De behandeling van het statische model van Leontief (over de transformatielijn van arbeid; netto produktie; onderlinge leveringen en prijzen) op basis van de vergelijkingen (1.1.1) t/m (1.1.4), moet worden ingeleid door een bespreking van de voorwaarden welke uit de materiaalquoten voortvloeien. Deze voorwaarden zijn gedefinieerd door D. Hawkins en H.A. Simon[1].

De voorwaarden van Hawkins-Simon

Produktie gepaard aan levering van materialen, waarbij elke industrie direct of indirect materiaal verbruikt van elke andere industrie, is één van de hypotheses van de produktiestructuur van Leontief. De mate van de onderlinge leveringen is echter aan bepaalde voorwaarden gebonden, wil althans produktie mogelijk zijn.
Zo is het onmogelijk dat het verbruik van het goed in de industrie, waarin het wordt gemaakt, groter is dan de produktie. Indien bijvoorbeeld voor de gasproduktie gas nodig is, mag het directe verbruik van gas niet groter zijn dan de produktie, die uit dat verbruik resulteert (eerste voorwaarde van Hawkins-Simon).
Ook moet het indirecte verbruik, bij onderlinge levering van de industrieën, tezamen met het directe verbruik, lager zijn dan de produktie. Levert de gasindustrie bijvoorbeeld ook gas aan de steenkolenindustrie en deze laatste kolen voor de gasproduktie, dan mag het totaal van het gas voor de gasproduktie, het gas geleverd voor de kolen voor het gas, het gas voor het gas geleverd voor de kolen voor het gas etc., niet groter zijn dan de produktie van gas (tweede conditie van Hawkins-Simon).
De voorwaarden zijn ook uit de vergelijkingen van de produktiestructuur, zoals door Leontief gedefinieerd, af te leiden: zie (1.1.1 en 1.1.2):

$$\left.\begin{aligned} \mu_{c_a c_a} \cdot c_a + \mu_{c_a c_b} \cdot c_b + c_{a\,\text{netto}} &= c_a \\ \mu_{c_b c_a} \cdot c_a + \mu_{c_b c_b} \cdot c_b + c_{b\,\text{netto}} &= c_b \end{aligned}\right] \qquad (1.2.1)$$

dus:

1) D. Hawkins en H.A. Simon, Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability, Econometrica, jaargang 17, p. 245-248.

$$\left.\begin{array}{l}(1-\mu_{c_a c_a})\cdot c_a-\mu_{c_a c_b}\cdot c_b=c_{a\,netto}\\ \\ -\mu_{c_b c_a}\cdot c_a+(1-\mu_{c_b c_b})\cdot c_b=c_{b\,netto}\end{array}\right] \qquad (1.2.2)$$

Uit dit vergelijkingenstelsel volgt, dat, wil netto produktie van c_a en c_b mogelijk zijn (dus $c_{a\,netto} > 0$, $c_{b\,netto} > 0$), zowel $\mu_{c_a c_a}$ als $\mu_{c_b c_b}$ kleiner moeten zijn dan 1 (eerste conditie van Hawkins-Simon).
Tevens kan gesteld worden dat de materiaalquoten nooit negatief kunnen zijn. Indien nl. $\mu_{c_a c_a}$ of $\mu_{c_b c_b} < 0$ zouden zijn, zou dat een netto produktie van c_a of c_b betekenen, terwijl negatieve onderlinge levering van de eerste industrie aan de tweede niets anders is dan een positieve levering van de tweede aan de eerste.
Alle grootheden in de vergelijkingen zijn dus positief. In de theorie van de positieve matrices[1] bewijst men nu, dat positieve waarden voor c_a en c_b mogelijk zijn als:

$$\begin{vmatrix} 1-\mu_{c_a c_a} & -\mu_{c_a c_b} \\ -\mu_{c_b c_a} & 1-\mu_{c_b c_b} \end{vmatrix} > 0 \qquad (1.2.3)$$

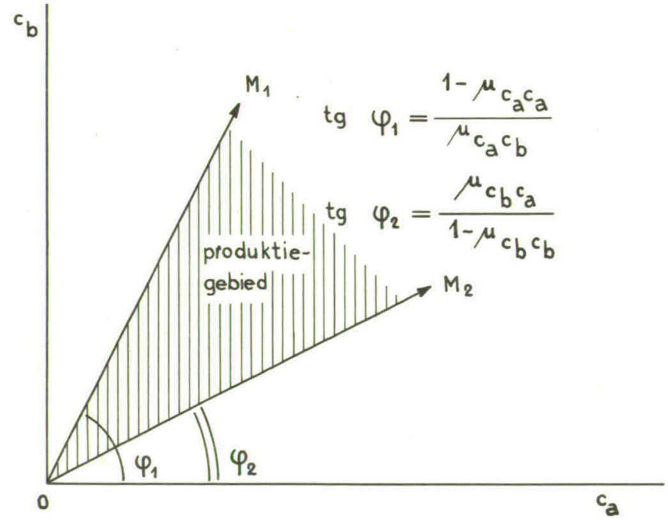
Gelijktijdig wordt dan voldaan aan de twee condities van Hawkins-Simon.
Een beeld van deze condities wordt nog gegeven in grafiek 1.
Netto produktie nl. houdt in, dat $c_{a\,netto} > 0$ of $c_{b\,netto} > 0$, zodat men het vergelijkingenstelsel (1.2.2) kan weergeven als:

$$\begin{array}{l}(1-\mu_{c_a c_a})\,c_a-\mu_{c_a c_b}\,c_b > 0\\ \\ -\mu_{c_b c_a}\,c_a+(1-\mu_{c_b c_b})\,c_b > 0\end{array} \qquad (1.2.4)$$

1) S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics, Londen, 1959.

Vervangt men in dit stelsel het > teken door =, dan worden door de lijnen M_1 en M_2 van grafiek 1 de vergelijkingen grafisch weergegeven.

Grafiek 1. **Weergave van de condities van** Hawkins - Simon.



Uit de eerste vergelijking volgt, dat de produktie van c_a en c_b zodanig moet zijn, dat het punt, waarmede de produktie in de grafiek wordt weergegeven, op of onder M_1 moet liggen. Op de lijn M_1 ligt dit punt nl. als $c_{a\ netto} = 0$, want dan geldt in de eerste vergelijking een = teken (zie 1.2.2). Onder de lijn is van produktie van $c_{a\ netto}$ sprake. De tweede vergelijking maakt een produktie onder M_2 onmogelijk.

Duidelijk blijkt, dat de verhouding, waarin c_a en c_b geproduceerd kunnen worden, sterk afhankelijk is van de verhouding van de materiaalquoten. Alleen als

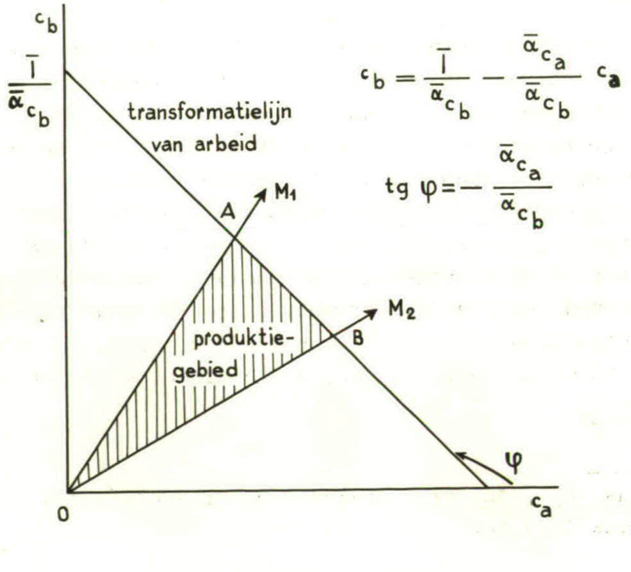
$$\frac{1-\mu_{c_a c_a}}{\mu_{c_a c_b}} > \frac{\mu_{c_b c_a}}{1-\mu_{c_b c_b}} \tag{1.2.5}$$

is netto produktie mogelijk.

Transformatiefunctie van arbeid

Tot nu toe zijn alleen de beperkingen, welke de materiaalquoten aan de produktie stellen, in de beschouwingen opgenomen. Uit de transformatiefunctie van arbeid, welke bepaald wordt door de technische gegevens en door de hoeveelheid arbeid, vloeien ook voor de produktie beperkingen voort. Toch moesten hier eerst de condities, welke door Hawkins-Simon zijn gedefinieerd, worden behandeld, omdat er alleen dan geproduceerd wordt, als aan deze condities voldaan is, terwijl de inschakeling van de factor arbeid produktie impliceert.
De transformatiefunctie van arbeid is in (1.1.3) weergegeven als: $\bar{\alpha}_{c_a} c_a + \bar{\alpha}_{c_b} c_b = \bar{1}$. In de statische modellen van Leontief is dit de enige transformatiefunctie, daar in dit model alleen de factor arbeid schaars is. Door de lineaire technologie ($\bar{\alpha}_{c_a}$ en $\bar{\alpha}_{c_b}$ zijn constant) het ontbreken van "joint production" (d.w.z. bij de produktie van c_a resp. c_b wordt alleen c_a of c_b voortgebracht, en dus niet c_a èn c_b), en het schaars zijn van slechts één produktiefactor (arbeid), kan men de beperkingen welke door deze produktiefactor aan het produktieproces worden opgelegd grafisch voorstellen door een rechte lijn (zie grafiek 2).

Grafiek 2. De transformatielijn van arbeid als beperking van de produktie.



Het produktiegebied wordt nu beperkt tot O A B. Elke combinatie van c_a en c_b in dit gebied kan men, althans technisch, produceren. Indien men de schaarste van de factor arbeid in de beschouwing betrekt en men, gegeven een bepaalde hoeveelheid arbeid, streeft naar een zo hoog mogelijke produktie, is echter alleen de produktie, in omvang en verhouding zoals op het lijnstuk A B wordt aangegeven, efficient. Alleen dan wordt nl. de gegeven hoeveelheid arbeid volledig ingeschakeld en ontstaat de via die inschakeling te realiseren maximale produktie van c_a- en c_b-goederen.

Men kan zich nu nog de vraag stellen, of het mogelijk is, dat c_a en c_b op verschillende wijzen worden voortgebracht. Kan er m.a.w. een arbeidsintensieve naast een arbeidsextensieve techniek bestaan, bijvoorbeeld voor c_a (met dezelfde onderlinge leveringen)? Technisch is dit inderdaad mogelijk, maar, gezien het feit, dat alleen arbeid schaars is, zal slechts de arbeidsextensieve techniek economisch verantwoord zijn. Hoe minder arbeid nl. per produkt wordt verbruikt, des te groter kan, gegeven een bepaalde hoeveelheid arbeid, de totale produktie zijn.
Zo luidt het substitutie-theorema van Samuelson[1]: als er een schaarse produktiefactor is, en geen "joint production", is er, op economische gronden, voor elk produkt slechts een produktiemogelijkheid.

Netto produktie

De produktie, welke is aangegeven door het lijnstuk A B (grafiek 2), bestaat voor een gedeelte uit produkten bestemd voor de onderlinge levering, voor een ander gedeelte uit netto c_a- en c_b-goederen. Om nu de netto produktie in de vergelijkingen duidelijk naar voren te brengen, maakt Leontief gebruik van het begrip "gecumuleerde quote". De tot nu toe gebruikte factorquoten (directe quoten) geven aan, hoeveel eenheden van de produktiefactor direct moeten worden ingeschakeld bij de voortbrenging van een eenheid van het eindprodukt (directe vraag naar arbeid). Voor de netto produktie echter van een goed wordt, naast de hoeveelheid van de produktiefactor, welke direct voor dit goed zelf

1) Koopmans (ed), Activity Analysis of Production and Allocation, hoofdstuk 7 en 10.

wordt aangewend, nog arbeid gevraagd voor de produktie van de materialen, welke als input bij de produktie nodig zijn (indirecte vraag naar arbeid). De gecumuleerde quoten nu geven aan hoeveel eenheden van de produktiefactor in totaal (direct + indirect) bij de netto produktie van een eenheid nodig zijn.
Uit de bovenomschreven definitie van de gecumuleerde quoten volgt, dat de transformatiefunctie van arbeid nu luidt:

$$\alpha_{c_a} \cdot c_{a\,netto} + \alpha_{c_b}\, c_{b\,netto} = \bar{1}^{1)} \qquad (1.2.6)$$

Uit de vergelijkingen (1.1.1) t/m (1.1.3) en (1.2.6) kan worden afgeleid[2]:

$$\alpha_{c_a} = \frac{\bar{\alpha}_{c_a}(1 - \mu_{c_b c_b}) + \bar{\alpha}_{c_b} \cdot \mu_{c_b c_a}}{(1 - \mu_{c_a c_a})(1 - \mu_{c_b c_b}) - \mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a}} \qquad (1.2.7)$$

$$\alpha_{c_b} = \frac{\bar{\alpha}_{c_a}\mu_{c_a c_b} + \bar{\alpha}_{c_b}(1 - \mu_{c_a c_a})}{(1 - \mu_{c_a c_a})(1 - \mu_{c_b c_b}) - \mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a}} \qquad (1.2.8)$$

Onderlinge leveringen

Een gedeelte van de produktie van c_a en c_b wordt gebruikt voor de "onderlinge levering". Tot nu toe is daarvoor de verklaring gegeven, dat voor de produktie van bijvoorbeeld één eenheid c_a een bepaalde hoeveelheid c_a ($\mu_{c_a c_a}$) en c_b ($\mu_{c_b c_a}$) nodig is als materiaal.
Een andere verklaring is echter mogelijk, als men het minimum pakket levensmiddelen, dat de arbeider nodig heeft, in de beschouwing opneemt[3]. Definieert men dit onderhoudspakket voor de arbeiders in de c_a-industrie als $\mu_{c_a c_a} : \bar{\alpha}_{c_a}$ van het c_a-produkt ($O_{c_a c_a}$) en $\mu_{c_b c_a} : \bar{\alpha}_{c_a}$ van het c_b-produkt ($O_{c_b c_a}$), dan blijkt, dat

1) $\bar{\alpha}$ is de directe; α de gecumuleerde arbeidsquote.
2) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, p. 208 e.v.
3) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, o.a. p. 10 en p. 20.

de "materiaalquoten" bij de produktie van één eenheid c_a gelijk zijn aan $\mu_{c_a c_a}$ en $\mu_{c_b c_a}$, daar bij die produktie $\bar{\alpha}_{c_a}$ arbeid vereist is. Eenzelfde verklaring geldt voor $\mu_{c_a c_b}$ en $\mu_{c_b c_b}$. Een en ander kan als volgt in vergelijkingen worden weergegeven:

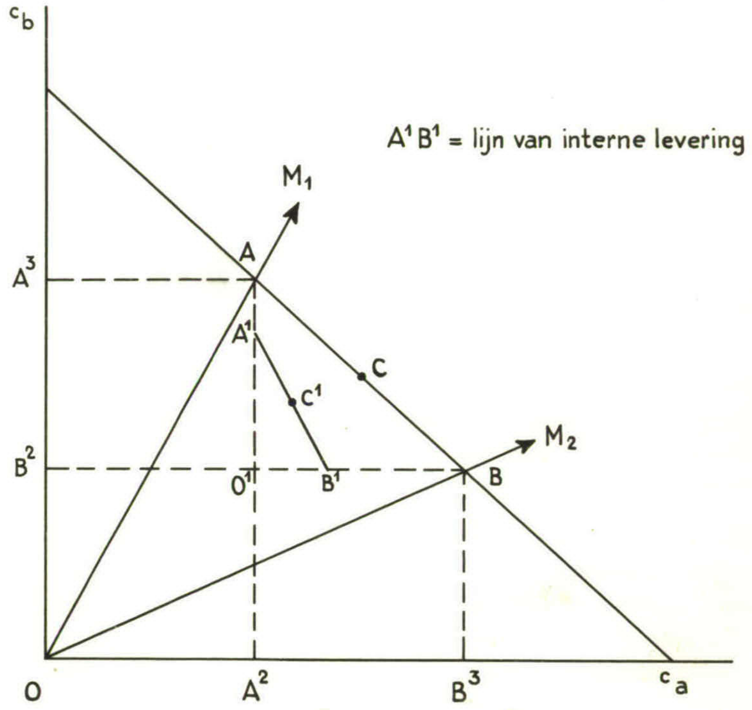
$$O_{c_a c_a} = \frac{\mu_{c_a c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}} \qquad (1.2.9) \qquad\qquad O_{c_b c_a} = \frac{\mu_{c_b c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}} \qquad (1.2.10)$$

$$O_{c_a c_b} = \frac{\mu_{c_a c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} \qquad (1.2.11) \qquad\qquad O_{c_b c_b} = \frac{\mu_{c_b c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} \qquad (1.2.12)$$

In deze onderhoudspakketten per arbeider kan verschil bestaan in de verschillende bedrijfstakken, omdat de arbeidsinspanning overeenkomstig de aard van het werk in de onderscheiden sectoren verschillend kan zijn.

Nu aangenomen is dat de onderlinge leveringen bestaan uit consumptiegoederen voor levensonderhoud en dat de netto produktie bestemd is voor de consumptie welke boven het minimum uitgaat, moet de verdeling van de totale produktie over deze beide soorten nog bestudeerd worden.
Deze verdeling is, zoals uit het voorafgaande blijkt, afhankelijk van de grootte en de verhouding van de materiaal- en arbeidsquoten. Daarom is het niet mogelijk in grafiek 2 de "lijn van interne leveringen" zo aan te brengen, dat deze op elke situatie toepasbaar is. Grafiek 3 geeft dan ook alleen een voorbeeld. Dit voorbeeld is gegeven omdat de gedachten gemakkelijker met behulp van een grafiek te formuleren zijn (zie pag. 19).
Als de produktie van c_b gelijk is aan O A^3 en van c_a aan O A^2 (punt A) wordt de totale produktie van c_a gebruikt voor het minimum levensonderhoud van de arbeiders (A^1, het ene punt van de lijn van interne levering ligt dan op AA^2) terwijl voor de netto produktie van c_b bijvoorbeeld geldt: $c_{b\,netto} = AA^1$.
Anderzijds is bij de produktie, welke gelegen is op het snijpunt van M_2 en de transformatielijn van arbeid (punt B), de produktie van c_b volledig bestemd voor het minimum levensonderhoud. Men kan dus concluderen, dat de lijn van de interne levering haar eindpunten heeft op AA^2 en BB^2.[1)]

Grafiek 3. De lijn van interne levering.



In de uiterste punten van de lijn AB wordt dus de volledige produktie van c_a resp. c_b verbruikt voor het minimum levensonderhoud, maar tevens is in A $c_{b\ netto}$ en in B $c_{a\ netto}$ maximaal. Op elk punt gelegen tussen A en B is er netto produktie van c_a en c_b en is tevens in het minimum levensonderhoud voorzien.

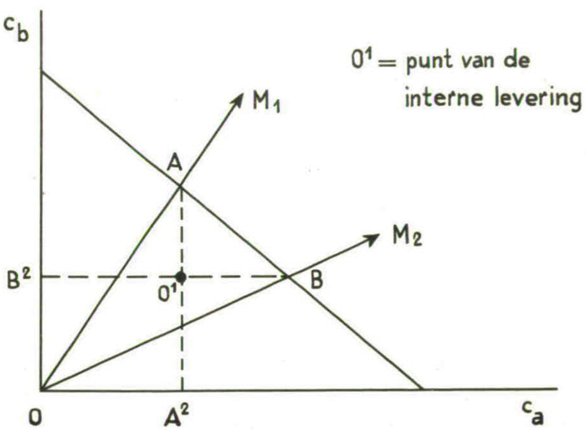
De produktieverhoudingen, weergegeven door de punten van de lijn AB, zijn alle mogelijk. Met elke verhouding komt een punt op de lijn van interne levering overeen (bijvoorbeeld met C het punt C^1).

1) Zie voor de bepaling van de lijn van interne levering appendix I.

Welke produktie van c_a en c_b gekozen wordt is nu nog niet vast te stellen. Dit hangt nl. af van de preferenties van de consumenten, welke in de vraagfunctie naar voren komen.

Een interessant, doch niet onrealistisch geval doet zich voor als het onderhoudspakket per arbeider in de c_a- en de c_b-industrie gelijk is. Deze hypothese is van belang, als de arbeidsinspanning in alle bedrijfstakken dezelfde is. Dan geldt dus, dat elke arbeider, waar ook te werk gesteld, een bepaalde hoeveelheid c_a en c_b als minimum voor zijn levensonderhoud nodig heeft, ($O_{c_a c_a} = O_{c_a c_b}$; $O_{c_b c_a} = O_{c_b c_b}$). Dan wordt de "lijn van de interne levering" teruggebracht tot een punt (grafiek 4).

Grafiek 4. Het punt van de interne levering.



In deze situatie is namelijk voor het onderhoud van alle arbeiders een vaste hoeveelheid c_a ($0\ A^2 = \bar{1}\ O_{c_a c_a} = \bar{1}\ O_{c_a c_b}$) en c_b ($0\ B^2 = \bar{1}\ O_{c_b c_b} = \bar{1}\ O_{c_b c_a}$) nodig, onafhankelijk van de plaats waar de arbeiders in het produktieproces ingeschakeld zijn. Neemt men nu 0^1A en 0^1B als assenstelsel dan kan men direct de netto produktie uit de grafiek bepalen (bijvoorbeeld produktie in B : van c_a is $0\ A^2$ nodig voor onderhoud, zodat 0^1B de netto pro-

duktie is; O B^2 is onderhoud in de vorm van c_b).
Uit de vergelijkingen met betrekking tot $c_{a\ verv.}$ en $c_{b\ verv.}$ in appendix I (I.7 en I.8)[1] is bovenstaande stelling eenvoudig te bewijzen.

Vraagfunctie

Tot nu toe is alleen rekening gehouden met één aspect van het economisch proces nl. met de produktiestructuur, waarbij het mogelijk was de efficiente produktiepunten aan te geven. Bij het zoeken naar de hoogste welvaart is het nodig ook de preferenties van de economische subjecten in de analyse te betrekken. Dit geschiedt door opname van de vraagfunctie in het model.
De vraag van de consument heeft betrekking op de goederen, die hij voor het levensonderhoud van zichzelf en de zijnen nodig heeft en op die produkten, welke na deze eerste verdeling nog ter beschikking staan (netto produktie). Na de behandeling van de voorwaarden van Hawkins-Simon en de interpretatie van het begrip gecumuleerde arbeidsquote is het niet nodig nog langer stil te staan bij dat gedeelte van de vraag, dat betrekking heeft op het minimum levensonderhoud.
Indien nl. bij de vervaardiging van goederen aan de condities van Hawkins-Simon voldaan wordt, is de materiaalvoorziening, d.i. het minimum levensonderhoud, gewaarborgd. Men kan verder uitgaan van de gecumuleerde quoten en aldus de aandacht alleen op de netto produktie richten.
De vraag naar de netto consumptiegoederen is in (1.1.4) gedefinieerd als $c_{a\ netto} = c_{b\ netto}$. Door deze vraagfunctie op te nemen, wordt het model volledig bepaald. Als de verdeling van de produktie over c_a- en c_b-goederen volgens deze wens van de consument verloopt, is de produktie volledig economisch, d.w.z. zij voldoet zowel aan de voorwaarden, die de efficiency stelt (volledige inschakeling van de schaarse produktiefactor arbeid met behulp van de meest efficiente techniek) als ook aan de preferenties van de consumenten.

1) (I.7) = vergelijking 7 van appendix I. $c_{a\ verv.}$ ($c_{b\ verv.}$) = volume c_a- (c_b-)goederen, bestemd voor het minimum levensonderhoud van de arbeiders.

Prijsstructuur

In het voorafgaande werd alleen aandacht geschonken aan de invloed van de technische coëfficiënten op de produktiestructuur. Omdat echter ook de prijsverhouding mede door de technische coefficiënten bepaald wordt, is een analyse hiervan in het kader van deze studie gewenst.
Stelt men nl. dat de marktprijs en de kostprijs van de eindprodukten aan elkaar gelijk zijn (volledige concurrentie), dan valt aan de factor arbeid als enige schaarse produktiefactor alle meerwaarde toe. De andere factoren zijn nl. niet schaars en kunnen dus geen aanspraak maken op een deel van de opbrengst, omdat de prijs van een goed, dat in overvloed voorhanden is, nul is.
Zo is bijvoorbeeld het feitelijk rendement van kapitaal nihil, wanneer kapitaal absoluut overvloedig is. Het verwachte rendement van kapitaal hangt grotendeels af van het feitelijk rendement. Aangezien nu het gewenste rendement per se positief en dus bij kapitaalovervloed hoger is dan het verwachte rendement, geldt onder deze omstandigheden dat bij rationeel economisch handelen van investeren geen sprake kan zijn[1].
De prijs van de eindprodukten wordt derhalve - behalve door de kosten welke uit de onderlinge leveringen voortvloeien - uitsluitend door de prijs van arbeid bepaald. Daar arbeid homogeen is, is substitutie van deze factor tussen de produktieprocessen mogelijk en is de beloning welke uitgaat boven de kosten van levensonderhoud, overal gelijk. De prijs van c_a en c_b wordt dus slechts door α_{c_a} en α_{c_b} bepaald. Deze prijs van c_a (p_{c_a}) is verder op alle markten gelijk omdat het c_a-goed homogeen is "Homogene goederen zijn volledig substitueerbaar, hetgeen wil zeggen, dat alle ondernemingen die eenzelfde goed voortbrengen dezelfde prijs moeten stellen, willen zij niet volledig weggeconcurreerd worden"[2].
Hetzelfde geldt voor p_{c_b}.
Zou het in de toekomst gemakkelijker worden c_a voort te brengen, d.w.z. is in dit proces minder arbeid nodig door stijging van de

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, o.a. pag. 73.
2) D.B.J. Schouten, Een algemene evenwichtstheorie van de monopolistische concurrentie en van de nationale winstquote?, Maandschrift Economie, november 1961, pag. 54.

produktiviteit, dan daalt α_{c_a} t.o.v. α_{c_b} en derhalve p_{c_a} in verhouding tot p_{c_b} .

Stel:

$\bar{p}_{L\,c_a}$ = totale loonsom per arbeider in c_a-industrie, incl. kosten van levensonderhoud;

$\bar{p}_{L\,c_b}$ = totale loonsom per arbeider in c_b-industrie, incl. kosten van levensonderhoud[1];

p_L = meerwaarde per arbeider (in c_a- en c_b-industrie dezelfde);

p_{c_a} = prijs voor c_a;

p_{c_b} = prijs voor c_b.

Nu geldt:

$$p_{c_a} = \mu_{c_a\,c_a}\, p_{c_a} + \mu_{c_b\,c_a}\, p_{c_b} + \bar{\alpha}_{c_a}\, p_L. \tag{1.2.13}$$

$$p_{c_b} = \mu_{c_a\,c_b}\, p_{c_a} + \mu_{c_b\,c_b}\, p_{c_b} + \bar{\alpha}_{c_b}\, p_L \tag{1.2.14}$$

$$\bar{p}_{L\,c_a} = p_L + \frac{\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\, p_{c_a} + \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\, p_{c_b} \tag{1.2.15}$$

$$\bar{p}_{L\,c_b} = p_L + \frac{\mu_{c_a\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}}\, p_{c_a} + \frac{\mu_{c_b\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}}\, p_{c_b} \tag{1.2.16}$$

Uit (1.2.13) t/m (1.2.16) volgt:

$$p_{c_a} = \bar{\alpha}_{c_a}\, \bar{p}_{L\,c_a}$$

$$p_{c_b} = \bar{\alpha}_{c_b}\, \bar{p}_{L\,c_b}$$

1) Later in deze studie zal het bruto loon in alle industrieën aangeduid worden met het symbool $\bar{p}_L$. Dit is echter hier nog niet mogelijk, omdat alleen als de arbeiders overal dezelfde kosten van levensonderhoud hebben, het bruto loon in alle industrieën hetzelfde is.

Houdt men tevens rekening met (1.2.7) en (1.2.8) dan blijkt dat:

$$\left.\begin{array}{ll} p_{c_a} = \alpha_{c_a} \; p_L & (1.2.17) \\ & \\ p_{c_b} = \alpha_{c_b} \; p_L & (1.2.18) \end{array}\right] \text{dus } \frac{p_{c_a}}{p_{c_b}} = \frac{\alpha_{c_a}}{\alpha_{c_b}} \qquad (1.2.19)$$

Zo kan dus ook wiskundig worden afgeleid dat de prijsverhouding van de eindprodukten gelijk is aan de verhouding van de gecumuleerde arbeidsquoten.

Het model

In het voorafgaande zijn de vergelijkingen van het statische model van Leontief ontwikkeld. Verschillende daarvan werden afgeleid. Somt men de onafhankelijke vergelijkingen op, dan ontstaat het volgende model:

$$\mu_{c_a c_a} c_a + \mu_{c_a c_b} c_b + c_{a\,netto} = c_a \qquad (1.1.1)$$

$$\mu_{c_b c_a} c_a + \mu_{c_b c_b} c_b + c_{b\,netto} = c_b \qquad (1.1.2)$$

$$\bar{\alpha}_{c_a} \; c_a + \bar{\alpha}_{c_b} \; c_b = \bar{1} \qquad (1.1.3)$$

$$c_{a\,netto} = c_{b\,netto} \qquad (1.1.4)$$

k = 0

$$p_{c_a} = \mu_{c_a c_a} p_{c_a} + \mu_{c_b c_a} p_{c_b} + \bar{\alpha}_{c_a} \; p_L \qquad (1.2.13)$$

$$p_{c_b} = \mu_{c_a c_b} p_{c_a} + \mu_{c_b c_b} p_{c_b} + \bar{\alpha}_{c_b} \; p_L \qquad (1.2.14)$$

$$\bar{p}_{L\,c_a} = p_L + \frac{\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\, p_{c_a} + \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\, p_{c_b} \tag{1.2.15}$$

$$\bar{p}_{L\,c_b} = p_L + \frac{\mu_{c_a\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}}\, p_{c_a} + \frac{\mu_{c_b\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}}\, p_{c_b} \tag{1.2.16}$$

Als $\mu_{c_a\,c_a}$, $\mu_{c_a\,c_b}$, $\mu_{c_b\,c_a}$, $\mu_{c_b\,c_b}$, $\bar{\alpha}_{c_a}$ en $\bar{\alpha}_{c_b}$, $\bar{l}$ en p_L gegeven zijn, kan men uit deze acht vergelijkingen de vier volumengrootheden en de vier prijzen berekenen (c_a, c_b, $c_{a\,netto}$, $c_{b\,netto}$, p_{c_a}, p_{c_b}, $\bar{p}_{L\,c_a}$, $\bar{p}_{L\,c_b}$).

Natuurlijk is het mogelijk op basis van het bovenstaande een ander model te geven met behulp van de gecumuleerde arbeidsquoten. Hier is echter het fundamentele model opgesteld omdat dit de basis van de analyse vormde.

Cijfervoorbeeld 1

Om de begrippen, vergelijkingen en grafische voorstellingen te verduidelijken, worden de gevonden resultaten in cijfervoorbeelden nogmaals naar voren gebracht.

Gegeven: $\bar{\alpha}_{c_a} = 1/2$; $\bar{\alpha}_{c_b} = 1/4$

In beide industrieën heeft de arbeider voor levensonderhoud 1/4 c_a-goed en 1/2 c_b-goed nodig. (prijs van [illegible] levensmiddelen

$\bar{l} = 10$, $p_L = 1$.

Oplossing:

$$o_{c_a\,c_a} = \frac{\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}} = 1/4 \therefore \mu_{c_a\,c_a} = 1/8 \qquad \text{(zie 1.2.9)}$$

$$0_{c_b\,c_a} = \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}} = 1/2 \;\therefore\; \mu_{c_b\,c_a} = 1/4 \qquad \text{(zie 1.2.10)}$$

$$0_{c_a\,c_b} = \frac{\mu_{c_a\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} = 1/4 \;\therefore\; \mu_{c_a\,c_b} = 1/16 \qquad \text{(zie 1.2.11)}$$

$$0_{c_b\,c_b} = \frac{\mu_{c_b\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} = 1/2 \;\therefore\; \mu_{c_b\,c_b} = 1/8 \qquad \text{(zie 1.2.12)}$$

eerste conditie van Hawkins-Simon: $\mu_{c_a\,c_a}, \mu_{c_b\,c_b} < 1.$

tweede conditie:

$$\frac{1 - \mu_{c_a\,c_a}}{\mu_{c_a\,c_b}} > \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{1 - \mu_{c_b\,c_b}} \quad \text{nl.} \quad \frac{7/8}{1/16} > \frac{1/4}{7/8} \qquad (1.2.5)$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1/8\; c_a + 1/16\; c_b + c_{a\,\text{netto}} & = c_a & (1.1.1) \\ 1/4\; c_a + 1/8\; c_b + c_{b\,\text{netto}} & = c_b & (1.1.2) \\ 1/2\; c_a + 1/4\; c_b & = 10 & (1.1.3) \\ c_{a\,\text{netto}} = c_{b\,\text{netto}} & & (1.1.4) \end{array}\right] \begin{array}{l} c_a = 12\ 1/2 \\ c_b = 15 \\ c_{a\,\text{netto}} = 10 \\ c_{b\,\text{netto}} = 10 \end{array}$$

$\alpha_{c_a} = 2/3$ (1.2.7) $\qquad \alpha_{c_b} = 1/3$ (1.2.8)

Nu is: $\alpha_{c_a}\, c_{a\,\text{netto}} + \alpha_{c_b}\, c_{b\,\text{netto}} = \bar{1}$ (1.2.6)

Het onderhoud is:

$$c_{a\,\text{verv.}} = 0_{c_a c_a}\ \bar{I} = 1/4.10 = 2\ 1/2 = c_a - c_{a\,\text{netto}} \qquad (I.8)^{1)}$$

$$c_{b\,\text{verv.}} = 0_{c_b c_a}\ \bar{I} = 1/2.10 = 5 \qquad = c_b - c_{b\,\text{netto}} \qquad (I.7)$$

Voor de prijsverhouding geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} p_{c_a} = 1/8\ p_{c_a} + 1/4\ p_{c_b} + 1/2 & (1.2.13) \\ p_{c_b} = 1/16\ p_{c_a} + 1/8\ p_{c_b} + 1/4 & (1.2.14) \end{array}\right] \begin{array}{l} p_{c_a} = 2/3 \\ p_{c_b} = 1/3 \end{array}$$

$$\bar{p}_{L\,c_a} = 1\ 1/3 \qquad (1.2.15)$$

$$\bar{p}_{L\,c_b} = 1\ 1/3 \qquad (1.2.16)$$

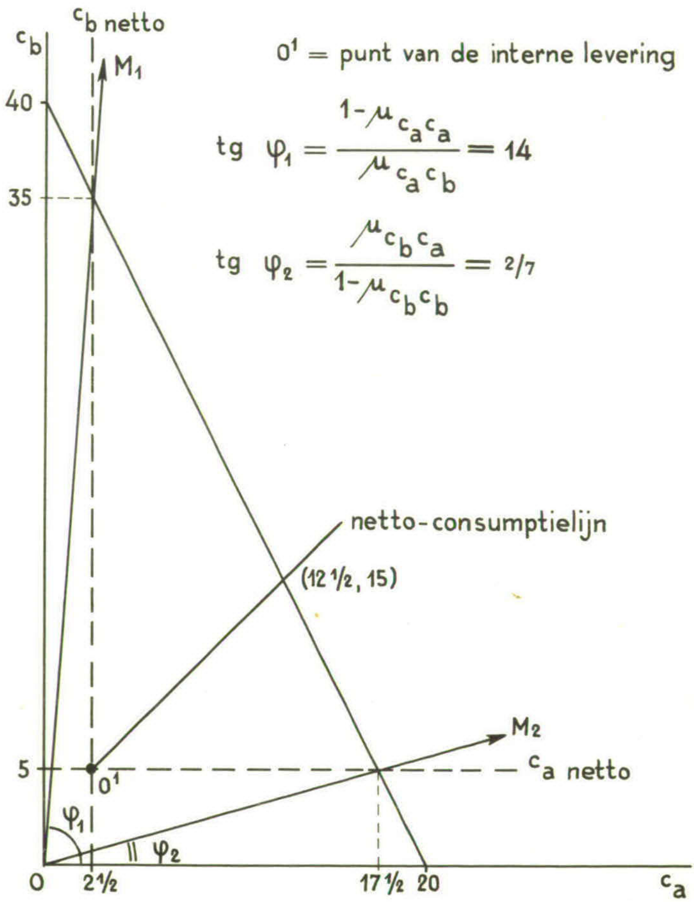
Tabel van middelen en bestedingen

Middelen		Bestedingen	
	Vol. x Prijs = Waarde		Vol. x Prijs = Waarde
$\bar{I}$: meerwaarde:	10 x 1 = 10	c_a: netto	10 x 2/3 = 20/3
onderh. c_a:	5/2 x 2/3 = 5/3	onderhoud	5/2 x 2/3 = 5/3
onderh. c_b:	5 x 1/3 = 5/3	c_b: netto	10 x 1/3 = 10/3
		onderhoud	5 x 1/3 = 5/3
	40/3		40/3

Uit de grafische weergave blijkt nu, dat er één punt van interne levering is, nl. (2 1/2, 5) (zie ook grafiek 4).

1) I.8: vergelijking 8 van appendix I.

Grafiek 5. Cijfervoorbeeld 1.



Cijfervoorbeeld 2

Gegeven : $\bar{\alpha}_{c_a} = 1/2, \bar{\alpha}_{c_b} = 1/4, \bar{I} = 10$

Voor onderhoud heeft de arbeider nodig:

	in c_a-industrie	in c_b-industrie
van c_a	1/4	1/3
van c_b	1/2	29/12

Oplossing:

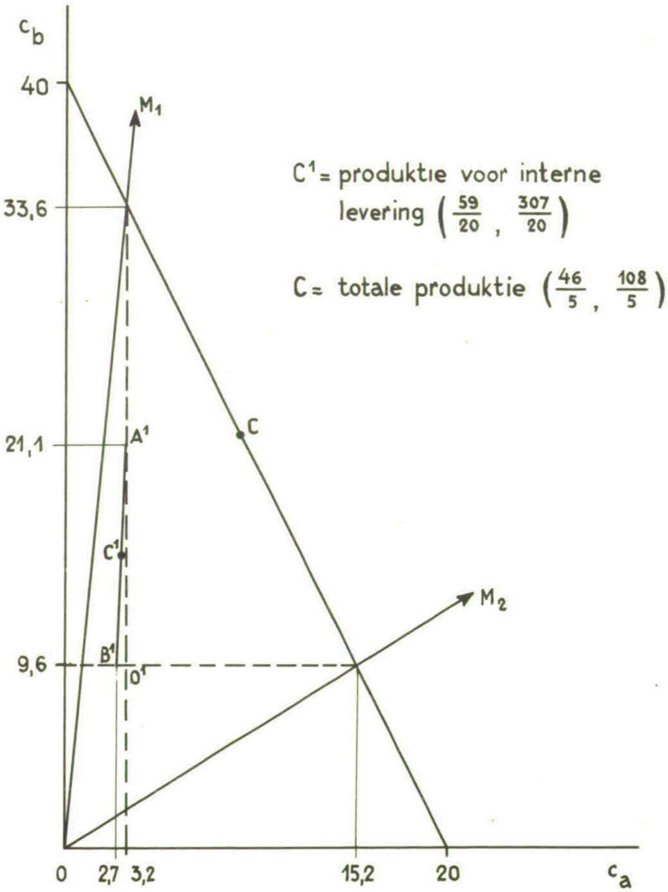
$$\left.\begin{array}{ll} \mu_{c_a c_a} = 1/8 & \mu_{c_a c_b} = 1/12 \\ \\ \mu_{c_b c_a} = 1/4 & \mu_{c_b c_b} = 29/48 \end{array}\right\} \text{Zie (1.2.9) t/m (1.2.12)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} c_a = 46/5 & c_{a\,netto} = 25/4 \\ \\ c_b = 108/5 & c_{b\,netto} = 25/4 \end{array}\right\} \text{(1.1.1) t/m (1.1.4)}$$

De lijn van de interne levering (A^1B^1) van grafiek 6 kan aldus worden verklaard: in de c_a-industrie wordt voor het onderhoud van de arbeiders minder c_a (dus B^1 links van O^1) en c_b (A^1 boven O^1) gevraagd dan in de c_b-industrie. Worden er dus arbeiders van de c_a-bedrijfstak naar de c_b-bedrijfstak overgeplaatst, dan zal het gedeelte van het nationaal produkt, dat voor het noodzakelijk levensonderhoud van de arbeider bestemd is, stijgen.
De formule voor deze lijn is:

$c_{b\,verv.} = 23\, c_{a\,verv.} - 52,5$ (zie I.7).

Grafiek 6. Cijfervoorbeeld 2.



3. Uitbreiding van het statische model

Schaarste van kapitaal[1)]

Tot nu toe is alleen aandacht geschonken aan de produktiefactor arbeid en aan de produktie van consumptiegoederen. Dit kan juist zijn als men een model opstelt voor een situatie van kapitaalovervloed, waarin de kapitaalgoederenvoorraad geen beperkende invloed heeft op de produktie, en de voortbrenging van investeringsgoederen voor vervanging en uitbreiding van het produktie-apparaat dus niet verantwoord is. Indien nl. kapitaal overvloedig is, zal de prijs van kapitaaldiensten d.w.z. het feitelijk rendement nihil zijn. Daar nu het verwachte rendement mede op dit feitelijk rendement gebaseerd is, betekent dit, dat nieuwe investeringen achterwege zullen blijven, omdat degene, die liquide middelen heeft, niet bereid is zijn geld aan de producent over te dragen. Ook de interne reserveringen zullen onder deze omstandigheden in liquide middelen aangehouden worden en dus niet bestemd worden voor de aankoop van kapitaalgoederen. In een situatie van kapitaalovervloed zullen dus geen investeringen plaats vinden, zodat produktie van i-goederen niet verantwoord is. In het algemeen moet men echter stellen, dat arbeid en kapitaalgoederen als oorspronkelijke produktiefactoren in het model moeten worden opgenomen, omdat beide schaars zijn. Of beide factoren in de loop van de tijd schaars blijven, d.w.z. over de ontwikkeling van de schaarste, zal pas later in het dynamische model worden gesproken. Het model waarin ook kapitaalgoederen als gegeven voorraad produktiemiddelen voorkomen, vertoont veel overeenstemming met dat van par. 1. Alleen worden nu door de produktie van investeringsgoederen (i) en de inschakeling daarvan in het produktieproces, de

---

1) In het vervolg zal het begrip kapitaal steeds duidelijker worden, naarmate zijn functies in het kader van een statische en dynamische beschouwing beter naar voren komen. Voorlopig wordt onder kapitaal verstaan: een homogene voorraad kapitaalgoederen, waarvan de aanwendingsmogelijkheden nog ongedifferentieerd zijn.

symbolen dienovereenkomstig gewijzigd.
Om het model der volumetransacties eenvoudig te kunnen houden, wordt aangenomen, dat naast het i-goed slechts één soort consumptiegoed wordt voortgebracht. Het model wordt nu (zie (1.1.1) t/m (1.1.3))

$$\mu_{cc}\, c + \mu_{ci}\, i + c_{netto} = c \tag{1.3.1}$$

$$\mu_{ic}\, c + \mu_{ii}\, i + i_{netto} = i \tag{1.3.2}$$

$$\bar{\alpha}_c\, c + \bar{\alpha}_i\, i = \bar{l} \tag{1.3.3}$$

$$\bar{\kappa}_c\, c + \bar{\kappa}_i\, i = \bar{k} \tag{1.3.4}$$

Als nieuwe functie is hier de transformatiefunctie van kapitaal opgenomen. De omvang van de produktie immers wordt nu niet alleen door de produktiefactor arbeid, maar ook door de factor kapitaal beperkt. De afzonderlijke kapitaalgoederen zijn evenals arbeid homogeen verondersteld, d.w.z. zij hebben eenzelfde ongedifferentieerde produktiecapaciteit en eenzelfde levensduur.

Nu de basis van het model in de vergelijkingen (1.3.1) t/m (1.3.4) gegeven is, zullen eerst wederom de beperkingen welke uit de technische coëfficiënten volgen, worden afgeleid. Deze beperkingen zijn:

de condities van Hawkins-Simon,

de verhouding van produktiefactoren en directe quoten,

de verhouding van produktiefactoren en gecumuleerde quoten.

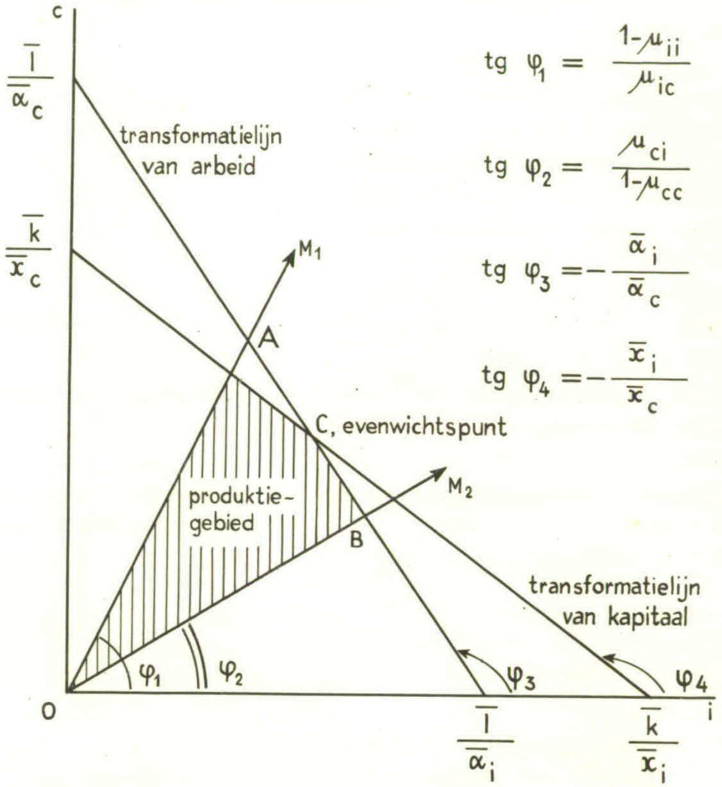
Daarna zal het model zelf worden geanalyseerd.

Condities van Hawkins-Simon

Ook in deze nieuwe situatie blijven de eerder geformuleerde condities van Hawkins-Simon van kracht (zie par. 2). Geheel analoog aan (1.2.5) nemen zij thans deze vorm aan:

$$\frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}} > \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}} \quad (1.3.5) \quad \text{(zie grafiek 7).}$$

Grafiek 7. De beperkingen van de condities van Hawkins - Simon en van de faktoren arbeid en kapitaal.



De verhouding van produktiefactoren en directe quoten[1]

Nu arbeid en kapitaal beide schaars zijn wordt de produktie, be-

---

1) Van de mogelijkheid dat $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} = \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$ wordt afgezien. In de zuivere macro-economie, waarbij men geen bedrijfstakken onderscheidt, wordt deze onrealistische hypothese echter gehanteerd. Het gevolg is dat vele interessante keuzeproblemen niet aan de orde komen.

halve door de arbeidsquoten en de hoeveelheid arbeid ook door de kapitaalquoten en de gegeven kapitaalgoederenvoorraad beinvloed. Indien nl. door de economische politiek geëist wordt dat arbeid en kapitaal volledig worden ingeschakeld, wenst men in feite dat de transformatielijnen van arbeid en kapitaal (grafische voorstelling van de vergelijkingen (1.3.3) en (1.3.4)) elkaar snijden in het positieve kwadrant. Alleen dan is dit doel van de economische politiek te verwezenlijken (o.a. punt C van grafiek 7). Bij elke andere produktieverhouding is ofwel kapitaal ofwel arbeid overvloedig. Per definitie geldt immers, dat alleen dan een produktiefactor volledig ingeschakeld is, als het produktiepunt op de transformatielijn van die factor valt. Als er dus twee transformatielijnen zijn, worden slechts beide factoren volledig ingeschakeld, bij een produktie-omvang, weergegeven door het snijpunt van die lijnen. Dat het snijpunt in het positieve kwadrant moet liggen, houdt, uitgedrukt in symbolen, het volgende in:

a) als $-\frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_c} < -\frac{\bar{\kappa}_i}{\bar{\kappa}_c}$ (zie grafiek 7), d.w.z. als $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} < \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$ moet

$\frac{\bar{l}}{\bar{\alpha}_i} \leqslant \frac{\bar{k}}{\bar{\kappa}_i}$ (zie i-as van grafiek 7) en $\frac{\bar{k}}{\bar{\kappa}_c} \leqslant \frac{\bar{l}}{\bar{\alpha}_c}$ (zie c-as).

Zo is dus : $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} \leqslant \frac{\bar{l}}{\bar{k}} \leqslant \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$. (1.3.6)

b) als daarentegen de consumptiegoederen worden voortgebracht volgens een relatief arbeidsintensieve en de i-goederen volgens een relatief kapitaalintensieve methode, dus als

$\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} > \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$ geldt $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} \geqslant \frac{\bar{l}}{\bar{k}} \geqslant \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$. (1.3.7)

Het voorafgaande is afgeleid uit de transformatiefuncties van arbeid en kapitaal. Dezelfde conclusie volgt ook uit de volgende overweging: als de aangeboden hoeveelheid arbeid zo groot is t.o.v. de aanwezige kapitaalgoederenvoorraad dat, zelfs bij de produktie volgens de meest arbeidsintensieve techniek, de arbeiders niet volledig tewerkgesteld kunnen worden, is het onmogelijk aan de voorwaarde van volledige inschakeling van de produktiefactoren (= in vergelijkingen (1.3.3) en (1.3.4)) te voldoen. Arbeid zal dan overvloedig zijn, d.w.z. de transformatielijnen van de arbeid en kapitaal snijden elkaar niet in het positieve kwadrant.

De verhouding van produktiefactoren en gecumuleerde quoten

Tot nu toe zijn de condities van Hawkins-Simon en de verhouding van produktiefactoren en directe quoten afgeleid. De eerste voorwaarde houdt in dat het produktiepunt tussen de lijnen van Hawkins-Simon moet liggen, wil er netto produktie zijn. Daarom moet ook de tweede voorwaarde, waarin slechts over een snijpunt in het positieve kwadrant wordt gesproken, stringenter worden geformuleerd. Dit gebeurt in deze derde beperking. Om deze beperking ook algebraisch te definieren, moet eerst de beschouwing van par. 2 over de gecumuleerde quoten worden uitgewerkt.

In het voorafgaande werd reeds gesteld, dat de gecumuleerde quoten van arbeid ontstaan door een combinatie van de directe factorquoten en de materiaalquoten (som van directe en indirecte input van arbeid). Hierbij werd de materiaallevering gezien als de verstrekking van het levensmiddelenpakket aan de arbeiders. In de factorquoten voor netto produktie (gecumuleerde quoten) werd dan ook tevens dit onderhoud opgenomen.
In het model, waarin naast de produktie van c ook de voortbrenging van i is opgenomen, kan tevens aan de materiaalquoten een soortgelijke betekenis i.v.m. het onderhoudspakket van de kapitaalgoederen worden gegeven. Tijdens het produktieproces nl. moet, naast de voeding van de arbeider, ook de vervanging van verbruikte kapitaaleenheden worden verzorgd. Als nl. één eenheid c wordt voortgebracht met $\bar{\alpha}_c$ arbeidseenheden en $\bar{\kappa}_c$ kapitaaleenheden en het doel van de volkshuishouding, naast de netto produktie, gelegen is in het op peil houden van het arbeidspotentieel en de kapitaalgoederenvoorraad, is vervanging van verbruikte eenheden nodig. Analoog met het gestelde in par. 2 geeft μ_{cc} aan hoe groot het onderhoudspakket moet zijn, dat de $\bar{\alpha}_c$ arbeiders nodig hebben en μ_{ic} de vervangingsinvesteringen voor de c-indus-

trie, welke door het gebruik van de $\bar{\kappa}_c$ kapitaaleenheden vereist worden. Hetzelfde geldt voor μ_{ci} en μ_{ii} in de i-industrie. Gaat men er van uit dat de arbeiders voor het minimum levensonderhoud slechts c-goederen nodig hebben en de vervangingsinvesteringen bestaan uit i-goederen en gebruikt men het symbool O voor het onderhoudspakket van één arbeider en V voor de vervangingsinvesteringen per kapitaaleenheid dan is:

$O_{cc} = \dfrac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}$ (minimum levensonderhoud bestaande uit c-goederen per arbeider in de c-industrie)

$O_{ci} = \dfrac{\mu_{ci}}{\bar{\alpha}_i}$ (idem per arbeider in i-industrie)

$V_{ic} = \dfrac{\mu_{ic}}{\bar{\kappa}_c}$ (vervangingsinvesteringen per verbruikte kapitaaleenheid in de c-industrie)

$V_{ii} = \dfrac{\mu_{ii}}{\bar{\kappa}_i}$ (idem in de i-industrie)[1].

De gecumuleerde quoten[2] zijn:

$$\alpha_c = \frac{\bar{\alpha}_c\ (1 - \mu_{ii}) + \bar{\alpha}_i\ \mu_{ic}}{(1 - \mu_{cc})\ (1 - \mu_{ii}) - \mu_{ci}\ \mu_{ic}} \qquad (1.3.8)$$

$$\alpha_i = \frac{\bar{\alpha}_c\ \mu_{ci} + \bar{\alpha}_i\ (1 - \mu_{cc})}{(1 - \mu_{cc})\ (1 - \mu_{ii}) - \mu_{ci}\ \mu_{ic}} \qquad (1.3.9)$$

---

1) Bij $V_{ic} = V_{ii} = 1$ d.w.z. onder de hypothese dat de levensduur van kapitaalgoederen gelijk is aan de produktieperiode en de kapitaalgoederen in alle aanwendingsrichtingen eenzelfde onderhoud vereisen (zie cijfervoorbeeld 3 en 4), is de waarde van de vervangingsinvesteringen gelijk aan de totale kapitaalwaarde.

2) Zie voor afleiding o.a. D.B.J. Schouten, Exacte Economie, appendix II.

$$\kappa_c = \frac{\bar{\kappa}_c (1 - \mu_{ii}) + \bar{\kappa}_i \mu_{ic}}{(1 - \mu_{cc}) (1 - \mu_{ii}) - \mu_{ci} \mu_{ic}} \qquad (1.3.10)$$

$$\kappa_i = \frac{\bar{\kappa}_c \mu_{ci} + \bar{\kappa}_i (1 - \mu_{cc})}{(1 - \mu_{cc}) (1 - \mu_{ii}) - \mu_{ci} \mu_{ic}} \qquad (1.3.11)$$

De betekenis hiervan is: de hoeveelheid arbeid c.q. kapitaal welke direct en indirect voor de netto produktie van een eenheid c of i nodig is.

Na deze uiteenzetting is het mogelijk de voorwaarde, dat de transformatielijn van kapitaal het lijnstuk A B van grafiek 7 moet snijden, analoog met (1.3.6) en (1.3.7), algebraisch te definieren nl.:

a) als $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} > \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ dan moet $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} \geqslant \frac{\bar{l}}{\bar{k}} \geqslant \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ (1.3.12)

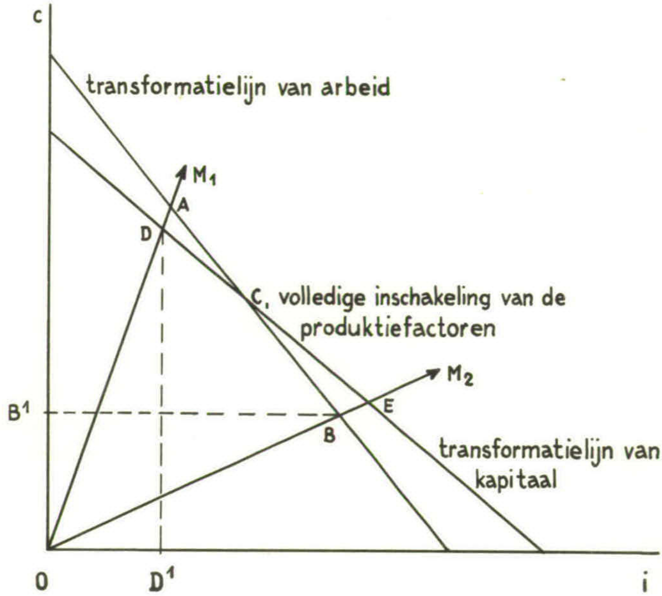
Indien nl. alle produktiekrachten ingeschakeld worden voor de arbeidsintensieve voortbrenging van consumptiegoederen moet overvloed van arbeid onmogelijk zijn ($\bar{l} : \bar{k} \leqslant \alpha_c : \kappa_c$), terwijl er geen kapitaaloverv1oed mag bestaan bij een volledige inschakeling van arbeid en kapitaal in de kapitaalintensieve i-produktie.

b) als $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} < \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ dan moet $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} \leqslant \frac{\bar{l}}{\bar{k}} \leqslant \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ (1.3.13)

Dit betekent in woorden dat voor de factor arbeid altijd volledig emplooi te vinden moet zijn indien uitsluitend arbeidsintensieve investeringsgoederen zouden worden geproduceerd, terwijl kapitaal volledig ingeschakeld moet zijn als netto produktie van kapitaalintensieve consumptiegoederen het enige doel van de economie is.

Als aan de drie gestelde voorwaarden is voldaan, is er netto produktie, zoals in grafiek 8 is weergegeven.

Grafiek 8. Netto produktie met volledige inschakeling van arbeid en kapitaal.



In het voorafgaande zijn nu drie beperkingen, welke uit het model voortvloeien, afgeleid. Bij deze analyse werd reeds over enkele centrale punten van het model gesproken (o.a. netto produktie en gecumuleerde quoten). De overige kwesties (onderlinge leveringen, grensprodukt, vraagfunctie en prijs) worden nu behandeld.

Onderlinge leveringen

De bepaling van de lijn van onderlinge levering vormt in deze analyse een probleem. Kon nl. in par. 2 de grens van het produktiegebied worden weergegeven door een rechte lijn (A B in grafiek 2), hier ontstaat door de invloed van arbeid en kapitaal het gebroken lijnstuk D C B (zie grafiek 8: produktie in E bijvoorbeeld is onmogelijk wegens tekort aan arbeid). In de vorige analyse kon de schaarse produktiefactor altijd volledig in het produktieproces worden ingeschakeld, maar in dit model is bijna al-

tijd één factor overvloedig. Van D tot C nl. wordt alleen kapitaal, van B tot C alleen arbeid volledig benut. Alleen in C is van volledige inschakeling van arbeid en kapitaal sprake.
In grafiek 8 kunnen, op dezelfde manier als in grafiek 3, bij D en B de interne leveringen worden aangegeven. De punten van deze interne leveringen liggen resp. op de loodlijnen D D^1 en B B^1. Gaf echter in grafiek 3 de rechte tussen twee punten de lijn van interne levering aan, bij dit model is van een rechte geen sprake. Bij de produktie in D en B nl. is arbeid c.q. kapitaal overvloedig. Echter alleen de voor het produktieproces benodigde hoeveelheid van de produktiefactoren kan aanspraak maken op onderhoud. Aangezien nu bij de produktie in C zowel kapitaal als arbeid volledig zijn ingeschakeld, zijn de interne leveringen bij deze produktie-omvang geen gewogen gemiddelde van de levensmiddelenpakketten en de vervangingsinvesteringen zoals deze bij de produktie in B en D geëist worden, daar er in C meer arbeid dan in D en meer kapitaal dan in B voor onderhoud in aanmerking komt.

Tot nu toe is er van uitgegaan, dat het voor het produktieproces benodigde aantal arbeiders in zijn eerste levensbehoefte kan voorzien (μ_{cc}, $\mu_{ci} > 0$). Dit is een eis welke deze produktiefactor stelt onafhankelijk van het feit of er werkloosheid is of niet[1]. Voor de kapitaalgoederen kan een soortgelijke eis niet gesteld worden. Vervangingsinvesteringen worden alleen gevraagd, als deze vervanging inderdaad verantwoord is. Als kapitaal overvloedig is (zie grafiek 8: produktie van B tot C), is het rationeel eerst de voorraad kapitaalgoederen aan te passen aan de eisen van de produktie door de verbruikte eenheden niet meer aan te vullen.
In feite betekent dit, dat bij kapitaalovervloed vervangingsinvesteringen achterwege zullen blijven, zodat dan een andere materiaaltechniek wordt toegepast, dan bij volledige inschakeling van kapitaal. De materiaalquoten, welke betrekking hebben op de

1) In de klassieke gedachtengang van bijvoorbeeld Ricardo wordt er een verband gelegd tussen het onderhoudspakket van de arbeider en de groei van de beroepsbevolking. Bij werkloosheid zal het onderhoudsloon laag zijn, bij een krappe arbeidsmarkt zal daarentegen het reële loon hoog zijn.

levering van i-produkten worden dan 0 ($\mu_{ic} = \mu_{ii} = 0$).
Hoe de totale vraag naar de investeringsgoederen zich in de verschillende situaties ontwikkelt, is nu, met toepassing van de statische analyse, nog niet te bepalen, omdat ook de netto produktie van investeringsgoederen (produktie van uitbreidingsinvesteringen) alleen zin heeft als deze worden gebruikt om de kapitaalgoederenvoorraad voor de volgende periode uit te breiden. Daarom zal dit probleem in par. 4 opnieuw aan de orde worden gesteld.

Slechts in één geval is het mogelijk de interne leveringen te bepalen nl. indien én kapitaal én arbeid volledig in het produktieproces zijn ingeschakeld (snijpunt van de transformatielijnen van arbeid en kapitaal; zie grafiek 8 punt C). De afleiding van dit punt van interne leveringen is weergegeven in appendix II.

Grensprodukt van arbeid en kapitaal

In de vergelijkingen (1.3.8) t/m (1.3.11) zijn de gecumuleerde factorquoten weergegeven. Nu de lijn van interne leveringen, voor zover dit bij deze statische methode mogelijk is, geanalyseerd is, kan van de vervangings- en onderhoudsproduktie worden afgezien en de analyse verder worden beperkt tot de beschouwing over de netto voortbrenging van c- en i-goederen.
De vergelijkingen worden dan (zie (1.2.6)):

$$\alpha_c \, c_{netto} + \alpha_i \, i_{netto} = \bar{l} \tag{1.3.14}$$

$$\kappa_c \, c_{netto} + \kappa_i \, i_{netto} = \bar{k} \tag{1.3.15}$$

Dit stelsel van transformatiefuncties leidt tot de volgende produktiefuncties voor het c-goed en i-goed.

$$c_{netto} = \frac{\kappa_i}{\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c} \bar{l} + \frac{-\alpha_i}{\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c} \bar{k} \tag{1.3.16}$$

$$i_{netto} = \frac{-\kappa_c}{\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c} \bar{l} + \frac{\alpha_c}{\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c} \bar{k} \tag{1.3.17}$$

Door differentieren[1] van de produktiefuncties worden de grensprodukten van arbeid en kapitaal bepaald:

$$\frac{dc_{netto}}{dl} = \frac{\kappa_i}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \quad = \frac{1}{\hat{\alpha}_e} \tag{1.3.18}$$

$$\frac{dc_{netto}}{dk} = \frac{- \alpha_i}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \quad \frac{1}{\hat{\chi}_1} \tag{1.3.19}$$

$$\frac{di_{netto}}{dl} = \frac{- \kappa_c}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \tag{1.3.20}$$

$$-\frac{di_{netto}}{dk} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \tag{1.3.21}$$

Er van uitgaande, dat de economische politiek zich ten doel stelt arbeid en kapitaal volledig bij de produktie in te schakelen, zal een toename van het aantal arbeiders leiden tot uitbreiding van de arbeidsintensieve produktiemethode. Indien nl. de c-industrie

---

1) Voor de bepaling van de grensproduktiviteit van kapitaal en arbeid kan men algebraisch ook een andere weg volgen. Met behulp van de determinant van Jacobi.

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta l}{\delta c} & \frac{\delta l}{\delta i} \\ \frac{\delta k}{\delta c} & \frac{\delta k}{\delta i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_c & \alpha_i \\ \kappa_c & \kappa_i \end{vmatrix}$$

kan men direct, uitgaande van de vergelijkingen (1.3.14) en (1.3.15) dezelfde uitkomst verkrijgen. Deze determinant is nodig, omdat het partieel differentiëren van genoemde vergelijkingen tot foutieve uitkomsten leidt, daar de produktie bepaald wordt door de gegeven eenheden $\overline{l}$ én $\overline{k}$.

arbeidsintensief is ($\alpha_c > \alpha_i$ en $\kappa_c < \kappa_i$), is $\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c > 0$, zodat, daar κ_i uiteraard steeds positief is,

$$\frac{dc_{netto}}{dl} > 0, \text{ terwijl } \frac{di_{netto}}{dl} < 0.$$

Dit is de algebraische uitdrukking van het feit dat de extra-inzet van arbeid alleen dan een positief grensprodukt oplevert als deze arbeider wordt tewerkgesteld in de arbeidsintensieve c-produktie en bovendien nog een aantal arbeiders uit de i-goederenindustrie worden overgeplaatst terwille van het vrijmaken van de benodigde additionele kapitaalgoederen voor de additionele c-produktie.

Vraagfunctie

In het voorafgaande is een analyse gegeven van de produktiestructuur van het uitgebreide statische model. Hierbij bleek, dat, als door de economische politiek volledige inschakeling van de produktiefactoren wordt geëist, de produktie bepaald is (punt C van grafiek 8). De vraag zal zich aan deze produktie moeten aanpassen. Voor een vraagfunctie, welke een van te voren vastgestelde fysieke vraagverhouding veronderstelt, is dus in het model geen plaats meer.
Hier blijkt dus dat in dit model twee doelstellingen van de sociaal-economische politiek niet tegelijkertijd te realiseren zijn. De doelstellingen welke nu met elkaar strijden zijn:
het bereiken van een produktiestructuur welke in overeenstemming is met de door de economische subjecten geprefereerde vraagverhouding en
het voorkomen van onvrijwillige werkeloosheid en onderbezetting van de kapitaalgoederen.
Een keuze moet gedaan worden. In deze analyse is de keuze gevallen op volledige inschakeling van de produktiefactoren.
Overigens zal het duidelijk zijn dat in de praktijk de vraagverhouding niet exact vast staat, doch afhankelijk is van de prijsverhouding. Het doel van het betoog is echter aan te geven dat bij geringe substitueerbaarheid van de eindprodukten niet aan deze doelstellingen van de economische politiek tegelijkertijd kan worden voldaan.

Prijsstructuur

Een moeilijkheid vormt nu nog de prijsstructuur. De produktie in punt C (grafiek 8) kent niet één, door het produktieproces opgelegde, prijsverhouding tussen c- en i-goederen. De reden hiervan is, dat de prijsverhouding van deze twee goederen bepaald wordt door de verhouding, waarin de toename van de produktie van c een afname van i of een afname van c een toename van i tengevolge heeft (dus $-\frac{dc}{di}$). Zoals uit grafiek 8 blijkt, is in punt C de verhouding niet te bepalen, omdat het produktiegebied, begrensd door D C B, in C een knikpunt heeft. Men kan alleen stellen dat de prijsverhouding van c en i schommelt tussen twee grenzen, aangegeven door de hellingshoeken van de transformatielijnen van arbeid en kapitaal. Voor wat de prijs van de produktiefactoren betreft, kan gesteld worden, dat zowel arbeid als kapitaal een deel van de meerwaarde ontvangen. De meerwaarde, d.i. de opbrengst van produktie welke niet nodig is voor onderhoud en vervanging, wordt nl. door volledige benutting van arbeid en kapitaal bereikt. Daarom zal, in tegenstelling met het gestelde in par. 2, in dit model het feitelijk rendement per kapitaaleenheid bepaald moeten worden. Gezegd is reeds, dat dit feitelijk rendement de basis is voor het verwachte rendement. Produktie van investeringsgoederen is nu slechts economisch verantwoord, als dit (door het feitelijk rendement bepaalde) verwachte rendement hoger is dan het gewenste rendement. Daar in dit model de voortbrenging van i-goederen opgenomen is, is impliciet verondersteld, dat dit het geval is. In feite betekent dit een situatie van relatieve kapitaalschaarste, waarin investeren aantrekkelijk is.
De prijsvergelijkingen in dit model zijn:

$$p_c = \mu_{cc}\, p_c + \mu_{ic}\, p_i + \bar{\alpha}_c\, p_L + \bar{\kappa}_c\, p_R \qquad (1.3.22)$$

$$p_i = \mu_{ci}\, p_c + \mu_{ii}\, p_i + \bar{\alpha}_i\, p_L + \bar{\kappa}_i\, p_R \qquad (1.3.23)$$

$$\bar{p}_{L\,c} = p_L + \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}\, p_c \text{ }^{1)} \qquad (1.3.24)$$

1) $\bar{p}_{L\,c}$ is het totale brutoloon in de c-industrie; p_L is het meerwaardeloon. Voor $\bar{p}_{Rc}$ en p_R geldt mutatis mutandis hetzelfde.

$$\bar{p}_{Li} = p_L + \frac{\mu_{ci}}{\bar{\alpha}_i} p_c \tag{1.3.25}$$

$$\bar{p}_{Rc} = p_R + \frac{\mu_{ic}}{\bar{\kappa}_c} p_i \tag{1.3.26}$$

$$\bar{p}_{Ri} = p_R + \frac{\mu_{ii}}{\bar{\kappa}_i} p_i \tag{1.3.27}$$

Uit de vergelijkingen (1.3.8) t/m (1.3.11) en (1.3.22) t/m (1.3.27) volgt:

$$\left.\begin{aligned} p_c &= \bar{\alpha}_c \; \bar{p}_{Lc} + \bar{\kappa}_c \; \bar{p}_{Rc} \\ p_i &= \bar{\alpha}_i \; \bar{p}_{Li} + \bar{\kappa}_i \; \bar{p}_{Ri} \end{aligned}\right]$$

en

$$\left.\begin{aligned} p_c &= \alpha_c \; p_L + \kappa_c \; p_R && (1.3.28) \\ p_i &= \alpha_c \; p_L + \kappa_i \; p_R && (1.3.29) \end{aligned}\right]$$

Als $\bar{k}$ absoluut overvloedig wordt, dus $p_R = 0$, geldt $\frac{p_c}{p_i} = \frac{\alpha_c}{\alpha_i}$; in geval van werkloosheid ($l > \bar{l}$) wordt $p_L = 0$ en geldt $\frac{p_c}{p_i} = \frac{\kappa_c}{\kappa_i}$, terwijl in punt C van grafiek 8 de prijsverhouding tussen beide uitersten in ligt.

Het model

Door het grote aantal vergelijkingen, welke in deze paragraaf behandeld zijn, is het moeilijk het volledige model duidelijk in het voorafgaande terug te vinden. Daarom worden nu de onafhankelijke vergelijkingen nogmaals weergegeven:

$$\mu_{cc}\ c + \mu_{ci}\ i + c_{netto} = c \tag{1.3.1}$$

$$\mu_{ic}\ c + \mu_{ii}\ i + i_{netto} = i \tag{1.3.2}$$

$$\bar{\alpha}_c\ c + \bar{\alpha}_i\ i = \bar{l} \tag{1.3.3}$$

$$\bar{\kappa}_c\ c + \bar{\kappa}_i\ i = \bar{k} \tag{1.3.4}$$

$$p_c = \mu_{cc}\ p_c + \mu_{ic}\ p_i + \bar{\alpha}_c\ p_L + \bar{\kappa}_c\ p_R \tag{1.3.22}$$

$$p_i = \mu_{ci}\ p_c + \mu_{ii}\ p_i + \bar{\alpha}_i\ p_L + \bar{\kappa}_i\ p_R \tag{1.3.23}$$

$$\bar{p}_{Lc} = p_L + \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}\ p_c \tag{1.3.24}$$

$$\bar{p}_{Li} = p_L + \frac{\mu_{ci}}{\bar{\alpha}_i}\ p_c \tag{1.3.25}$$

$$\bar{p}_{Rc} = p_R + \frac{\mu_{ic}}{\bar{\kappa}_c}\ p_i \tag{1.3.26}$$

$$\bar{p}_{Ri} = p_R + \frac{\mu_{ii}}{\bar{\kappa}_i}\ p_i \tag{1.3.27}$$

Als μ_{cc}, μ_{ci}, μ_{ic}, μ_{ii}, $\bar{\alpha}$, $\bar{\kappa}$, $\bar{l}$, $\bar{k}$ gegeven zijn, zijn de volumegrootheden bepaald. Alleen als twee prijzen gegeven zijn (bijvoorbeeld p_c en p_L) kunnen de prijsvergelijkingen worden opgelost. De reden hiervan is, dat in punt C van grafiek 8 meerdere raaklijnen aan het produktiegebied te trekken zijn. Wanneer de vraagverhouding een functie is van de prijzen kunnen de prijsverhoudingen worden gedetermineerd door de conditie van evenwicht tussen vraag en aanbod.

Uitgaande van de gecumuleerde quoten of de onderhoudspakketten, kan een gereduceerd stelsel van vergelijkingen opgesteld worden. Zoals in het voorafgaande is weergegeven, kan dit andere stelsel uit het gegeven model worden afgeleid.

Cijfervoorbeeld 3

Gegeven:	$\bar{\alpha}_c = 1/2$	$\bar{\alpha}_i = 1/8$	$\bar{I} = 100$
	$\bar{\kappa}_c = 1/2$	$\bar{\kappa}_i = 3/4$	$\bar{k} = 300$
	$O_{cc} = O_{ci} = 1$		$p_c = 6$
	$V_{ic} = V_{ii} = 1$		$p_L = 1$

Veronderstelling: in tegenstelling met het in het theoretische gedeelte gestelde, dat bij niet volledige inschakeling van kapitaal geen vervangingsinvesteringen nodig zijn, wordt nu verondersteld, dat in elke situatie voor de ingeschakelde produktiefactoren O en V gelijk zijn aan één.

Oplossing: $\mu_{cc} = 1/2 \quad \mu_{ci} = 1/8 \quad \alpha_c = 3 \quad \alpha_i = 2$
$\mu_{ic} = 1/2 \quad \mu_{ii} = 3/4 \quad \kappa_c = 8 \quad \kappa_i = 7$
Appendix II en (1.3.8) t/m (1.3.11)

Aan de voorwaarden van het model is voldaan:
1e voorwaarde (condities van Hawkins-Simon):

$\mu_{cc} < 1(1/2); \qquad \mu_{ii} < 1(3/4)$

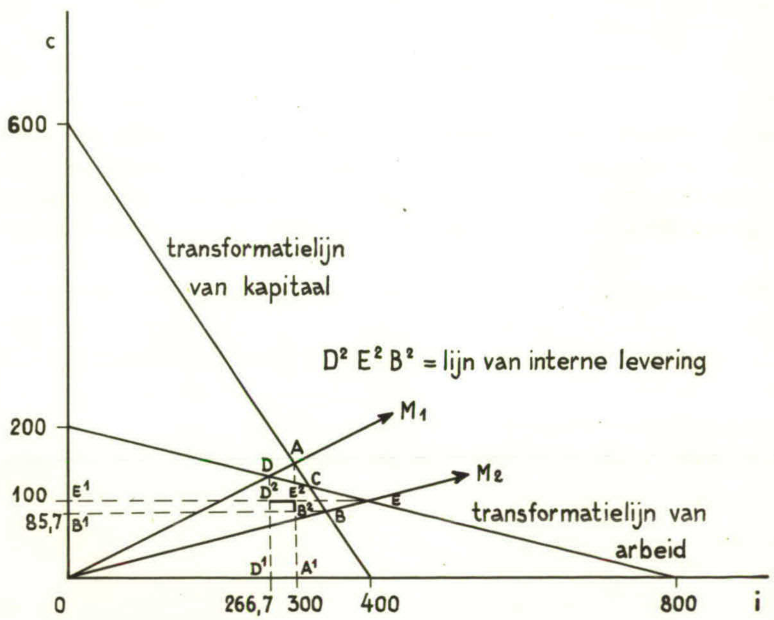
$$\frac{1-\mu_{ii}}{\mu_{ic}} > \frac{\mu_{ci}}{1-\mu_{cc}} \qquad (1/2 > 1/4) \tag{1.3.5}$$

2e voorwaarde: $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} > \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$, dus $\frac{\bar{\alpha}_c}{\bar{\kappa}_c} \geqslant \frac{\bar{I}}{\bar{k}} \geqslant \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\kappa}_i}$ $(1 > \frac{100}{300} > \frac{1}{6})$ (1.3.6)

3e voorwaarde: $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} > \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$, dus $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} \geqslant \frac{\bar{I}}{\bar{k}} \geqslant \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ $(3/8 > \frac{100}{300} > \frac{2}{7})$ (1.3.12)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Produktie: } c = 120,\ c_{netto} = 20,\ c_{verv.} = 100 \\ \qquad\qquad i = 320,\ i_{netto} = 20,\ i_{verv.} = 300\end{array}\right\} \text{(1.3.1) t/m (1.3.4)}$$

Grafiek 9. Cijfervoorbeeld 3.



Verklaring van de grafiek:

1) produktie in D: $c = 133{,}3$; $i = 266{,}7$
   onderhoud resp. vervanging in D^2: $c_{verv.} = 100$; $i_{verv.} = 266{,}7$
2) produktie in B: $c = 85{,}7$; $i = 342{,}9$
   onderhoud resp. vervanging in B^2: $c_{verv.} = 85{,}7$; $i_{verv.} = 300$
3) produktie in C: $c = 120$; $i = 320$
   onderhoud resp. vervanging in E^2: $c_{verv.} = 100$; $i_{verv.} = 300$.

Met volledige inschakeling van de produktiefactoren arbeid en kapitaal is de produktie $c = 120$ en $i = 320$ (punt C). Hoeveel voor vervanging van de verbruikte eenheden nodig is, is uit de gegevens direct af te leiden ($\bar{l} = 100$; $O_{cc} = O_{ci} = 1$ dus $c_{verv.} = 100$; $\bar{k} = 300$, $V_{ic} = V_{ii} = 1$, $i_{verv.} = 300$) (zie punt E^2). Bij de produktie in D is kapitaal overvloedig, omdat dan zoveel mogelijk de arbeidsintensieve produktiemethode wordt toegepast. De arbeiders zijn nog alle te werk gesteld ($c_{verv.} = 100$), terwijl slechts 266,7 kapitaaleenheden produktief worden aangewend ($i_{verv.} = 266{,}7$). Voor de produktie in B is arbeid niet volledig ingeschakeld vanwege de kapitaalintensieve methode van de i-produktie.

De lijnen van interne levering lopen evenwijdig met de i- en c-as. De reden hiervan is, dat de vervanging van $\bar{l}$ en $\bar{k}$ in de c- en i-industrie dezelfde is. Daarom is het bij volledige inschakeling van arbeid (punt C en D van grafiek 9) niet van belang of meer c dan wel meer i wordt geproduceerd, omdat het minimum levensonderhoud bij deze twee produktieniveaus gelijk is. Hetzelfde geldt voor de vervangingsinvesteringen bij C en B. De knik in de lijn van de interne levering wordt verklaard door het overschot van arbeid of kapitaal resp. in B en D (vergelijk grafiek 9 met grafiek 5).

Voor de prijzen in dit voorbeeld is nu voor punt C gegeven:

$p_c = 6$ en $p_L = 1$

dan geldt:

$$\left.\begin{aligned} p_R &= 3/8,\; p_i = 37/8 \\ \bar{p}_{Lc} = \bar{p}_{Li} &= 7 \\ \bar{p}_{Rc} = \bar{p}_{Ri} &= 5 \end{aligned}\right\} \quad (1.3.22) \text{ t/m } (1.3.27)$$

Tabel van middelen en bestedingen

volume x prijs = waarde	volume x prijs = waarde
arbeid : 100 x 7 = 700	c-goederen : 120 x 6 = 720
kapitaal : 300 x 5 = 1500	i-goederen : 320 x 37/8 = 1480
totaal 2200	totaal 2200

Cijfervoorbeeld 4

Gegevens en veronderstellingen: als cijfervoorbeeld 3 m.u.v.

$O_{cc} = 1$ $\qquad$ $O_{ci} = 1/2$

$V_{ic} = 1/2$ $\qquad$ $V_{ii} = 1$

Oplossing: $\mu_{cc} = 1/2$; $\mu_{ci} = 1/16$; $\alpha_c = 10/7$; $\alpha_i = 6/7$

$\mu_{ic} = 1/4$; $\mu_{ii} = 3/4$; $\kappa_c = 20/7$; $\kappa_i = 26/7$

Produktie bij volledige inschakeling van arbeid en kapitaal:

$c = 120$; $\quad c_{netto} = 40$

$i = 320$; $\quad i_{netto} = 50$

In het appendix II is voor de interne leveringen de volgende formule afgeleid:

$$c_{verv.} = O_{cc}\,\bar{l} + (O_{ci} - O_{cc})\,\bar{\alpha}_i\, i \qquad (II,5)^{1)}$$

$$i_{verv.} = V_{ic}\,\bar{k} + (V_{ii} - V_{ic})\,\bar{\kappa}_i\, i \qquad (II,6)$$

dus $c_{verv.} = 80$, $i_{verv.} = 270$.

1) (II,5): vergelijking 5 van appendix II.

4. Het dynamische model

In par. 2 werd uitsluitend aandacht besteed aan de factor arbeid en de produktie van consumptiegoederen. Dit is realistisch in een tijd waarin kapitaal overvloedig en de produktie van investeringsgoederen dus economisch niet verantwoord is. Vervolgens werd in par. 3 het model uitgebreid door ook kapitaal als schaarse produktiefactor en i-goederen als eindprodukt in het model op te nemen. In feite is het echter onmogelijk de netto produktie van investeringsgoederen zinvol te verklaren zonder deze in verband te brengen met de wenselijkheid van een uitbreiding van de kapitaalvoorraad in een van de volgende perioden. De produktie en installatie van investeringsgoederen houdt nl. in, dat deze eenheden de beperkingen welke door de factor kapitaal aan het produktieproces worden opgelegd, beïnvloeden. Dit nu betekent dat voor een volledige oplossing van het gestelde probleem een statisch model niet voldoende is. Men dient over te stappen naar een dynamische analyse, welke mogelijk wordt door het volgende model:

$$\mu_{cc}\ c\ (t) + \mu_{ci}\ i\ (t) + c_{netto}\ (t) = c\ (t) \tag{1.4.1}$$

$$\mu_{ic}\ c\ (t) + \mu_{ii}\ i\ (t) + i_{netto}\ (t) = i\ (t) \tag{1.4.2}$$

$$\bar{\alpha}_c\ c\ (t) + \bar{\alpha}_i\ i\ (t) \leqslant l\ (t) \tag{1.4.3}$$

$$\bar{\kappa}_c\ c\ (t) + \bar{\kappa}_i\ i\ (t) \leqslant k\ (t) \tag{1.4.4}$$

$$c_{netto}\ (t) = \Delta\ l\ (t) \tag{1.4.5}$$

$$i_{netto}\ (t) = \Delta\ k\ (t) \tag{1.4.6}$$

gegeven $\bar{l}\ (t_0)$ en $\bar{k}\ (t_0)$. (1.4.7)

In de eerste vier vergelijkingen is dit model (m.u.v. de tijdsindices) gelijk aan dat van par. 3 (zie (1.3.1) t/m (1.3.4)). Door deze tijdsindices, m.n. in de vergelijkingen (1.4.5) en (1.4.6), wordt het tijdselement geintroduceerd, maar toch is dit hier nog beperkt, hetgeen o.a. uit het constant blijven van de materiaal- en factorquoten blijkt.

Het grote verschil van dit model met het voorafgaande is gelegen in de vijfde en zesde vergelijking.

Door deze vergelijkingen wordt aangegeven hoe de hoeveelheid arbeid en kapitaal zich in de tijd ontwikkelt. Relatie (1.4.5) handelt over de groei van het arbeidspotentieel, (1.4.6) over het capaciteitsvermeerderend effect[1] van nieuwe investeringen. Hiervan zal eerst de laatste vergelijking behandeld worden.

De gedachte, dat investeringsgoederen, welke niet voor vervanging van verbruikte kapitaaleenheden nodig zijn, de kapitaalvoorraad vergroten, is algemeen aanvaard in de economische theorie. Deze nieuwe kapitaalgoederen kunnen per eenheid ofwel met eenzelfde hoeveelheid arbeid als oude kapitaalgoederen gecombineerd worden (breedte-investeringen), ofwel met minder arbeid (diepte-investeringen; verandering van techniek). In vergelijking (1.4.6) wordt impliciet gesteld, dat alle investeringen breedte-investeringen zijn. De i-goederen welke overblijven nadat aan de vervangingsvraag met behulp van μ_{ic} en μ_{ii} (1.4.2) is voldaan, zorgen er voor dat de vraag naar arbeid toeneemt. Als er na de vervanging nog netto produktie is, zal nadat bijvoorbeeld in periode t = 0 het produktieproces afgewikkeld is, de verbruikte voorraad $\bar{k}$ (t_0) weer vervangen worden en zal met behulp van i_{netto} $(t_0) = \Delta$ k (t_0) een toename van de capaciteit ontstaan. Zo wordt dus k (t_1) = k (t_0) + Δ k (t_0).

Veelal neemt men in de modellen de veronderstelling op, dat er een bepaalde tijd nodig is ("gestation period"), voordat de i-goederen produktief als kapitaal ingeschakeld zijn. Om het model eenvoudig te houden is deze "lag" beperkt tot één periode.

Bij de bepaling van de andere dynamische relatie (1.4.5) is uitgegaan van een op de klassieke bevolkingstheorie gebaseerde veronderstelling van Von Neumann[2], welke Allen aldus formuleert:

1) Capaciteitsvermeerderend wordt hier gebruikt in de zin van vermeerdering van de gelijktijdige produktiecapaciteit. De vergroting van de volgtijdige capaciteit, welke ontstaat door de produktie van duurdere kapitaalgoederen met eenzelfde gelijktijdige capaciteit doch met een langere levensduur, blijft hier eenvoudigheidshalve buiten beschouwing.

2) J. v. Neumann, A model of General Economic Equilibrium, Review of Economic Studies, vol. 13 pag. 1 t/m 9.

"..... there is no limit on the amounts of primary factors (land, unskilled labour) available in the system ..... the services of labour are an output against inputs consisting of the consumption (in fixed proportions) of the commodities necessary to maintain (and, if necessary, to train) the workers"[1]. Zo ontstaat een gesloten model "This is a closed model in which labour is treated as a produced commodity and consumption as the raw materials used up in the production of labour".[2] De arbeiders, welke bijvoorbeeld in de periode t = 0 te werk gesteld zijn, krijgen het minimum levensonderhoud via μ_{cc} en μ_{ci}. De consumptiegoederen welke daarna nog overblijven, worden gebruikt als input voor de "produktie" van nieuwe arbeiders[3]. Aansluitend op deze gedachte, dat door de input van additionele consumptiegoederen nieuwe arbeiders ingeschakeld kunnen worden in het produktieproces, is gesteld dat $c_{netto}(t) = \Delta l(t)$. Voor de arbeiders, die reeds tewerk gesteld zijn, is het levensonderhoud in het model opgenomen in (1.4.1) (μ_{cc} en μ_{ci}).
Het algemene model, zoals dat tot nu toe in deze paragraaf is weergegeven, kan op verschillende wijzen worden verfijnd. Bepaalde veronderstellingen over de materiaal- en factorquoten en de inschakeling van de produktiefactoren hebben invloed op het verloop van het produktieproces. Om nu de verschillende veronderstellingen, welke in de literatuur naar voren komen, systematisch in het model weer te geven, zullen achtereenvolgens behandeld worden:

a) de ontwikkelingslijn van Leontief,
b) de voorwaarde van Georgescu-Roegen,
c) de analyse van Dorfman-Samuelson-Solow,
d) een model met autonome bevolkingsgroei.

---

1) R.G.D. Allen, Mathematical Economics, New York, 1956, pag. 603.
2) W.J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, New York 1961, pag. 299.
3) In par. 4 d wordt de klassieke hypothese over de bevolkingsgroei vervangen door een andere.

a) De ontwikkelingslijn van Leontief

In het bovenstaande is een algemeen groeimodel ontwikkeld. De vergelijkingen, zoals deze in (1.4.1) t/m (1.4.7) gegeven zijn bepalen echter de groei niet eenduidig, m.n. omdat in de vergelijkingen (1.4.3) en (1.4.4) de mogelijkheid is opengelaten dat arbeid en kapitaal overvloedig zijn. In de theorie van Leontief wordt nu dit model nader gedetermineerd. Als voorwaarde stelt hij, dat de groei evenwichtig moet zijn, m.a.w. dat "alle volumina, dus in ons voorbeeld de produktie van consumptie- en investeringsgoederen, de beroepsbevolking en de kapitaalgoederenvoorraad ....., bij gelijkblijvende prijzen en beloningsvoeten exponentieel groeien d.w.z. van jaar tot jaar met een constant percentage toenemen".[1] Evenwichtige groei impliceert dus vooreerst dat arbeid en kapitaal steeds volledig benut moeten worden. Dit kan worden weergegeven door de transformatiefunctie van arbeid en kapitaal met een gelijkteken te schrijven (zie (1.4a.3) en (1.4a.4)). Naar analogie van (1.4.1) en (1.4.7) wordt het model nu:

$$\mu_{cc}\ c\ (t) + \mu_{ci}\ i\ (t) + c_{netto}\ (t) = c\ (t) \qquad (1.4a.1)$$

$$\mu_{ic}\ c\ (t) + \mu_{ii}\ i\ (t) + i_{netto}\ (t) = i\ (t) \qquad (1.4a.2)$$

$$\bar{\alpha}_c\ c\ (t) + \bar{\alpha}_i\ i\ (t) = l\ (t) \qquad (1.4a.3)$$

$$\bar{\kappa}_c\ c\ (t) + \bar{\kappa}_i\ i\ (t) = k\ (t) \qquad (1.4a.4)$$

$$c_{netto}\ (t) = \Delta\ l\ (t) \qquad (1.4a.5)$$

$$i_{netto}\ (t) = \Delta\ k\ (t) \qquad (1.4a.6)$$

gegeven $\bar{l}\ (t_o)$.

1) F. de Roos en D.B.J. Schouten, Groeitheorie, Haarlem 1960, pag. 50.

De drie condities van par. 3

De voorwaarde van volledige benutting van arbeid en kapitaal impliceert dat de condities welke in par. 3 werden ontwikkeld, zijn vervuld (de condities van Hawkins-Simon, de conditie betreffende verhouding van produktiefactoren en directe factorquoten en de conditie betreffende de verhouding van produktiefactoren en gecumuleerde quoten). Alleen dan zullen de transformatielijnen van arbeid en kapitaal elkaar snijden in het vlak, dat begrensd wordt door de lijnen van Hawkins-Simon, zodat, met volledige inschakeling van de produktiefactoren, aan de onderhouds- c.q. vervangingsvraag voldaan kan worden en netto produktie van c en i gewaarborgd is.

De verhouding van arbeid en kapitaal in de beginperiode

Uit de groeivergelijkingen (1.4a.5) en (1.4a.6) kan nu nog een andere voorwaarde worden afgeleid, welke een extra beperking oplegt aan de verhouding van arbeid en kapitaal. Deze afleiding kan het gemakkelijkst geschieden als de materiaalquoten en directe factorquoten worden vervangen door de gecumuleerde factorquoten. Het model wordt dan:

$$\alpha_c\ c_{netto}\ (t) + \alpha_i\ i_{netto}\ (t) = l\ (t) \tag{1.4a.7}$$

$$\kappa_c\ c_{netto}\ (t) + \kappa_i\ i_{netto}\ (t) = k\ (t) \tag{1.4a.8}$$

$$c_{netto}\ (t) = \Delta\ l\ (t) \tag{1.4a.9}$$

$$i_{netto}\ (t) = \Delta\ k\ (t) \tag{1.4a.10}$$

of

$$\left.\begin{aligned} \alpha_c\ \{l\ (t+1) - l\ (t)\} + \alpha_i\ \{k\ (t+1) - k\ (t)\} &= l\ (t) \\ \kappa_c\ \{l\ (t+1) - l\ (t)\} + \kappa_i\ \{k\ (t+1) - k\ (t)\} &= k\ (t) \end{aligned}\right] \begin{aligned} &(1.4a.11) \\ &(1.4a.12) \end{aligned}$$

Zoals in appendix III (zie (III,6)) wordt afgeleid, moet bij een evenwichtige groei in de beginperiode gelden:

$$\frac{\bar{l}(t_o)}{\bar{k}(t_o)} = \frac{2\,a_i}{-\,a_c + \kappa_i + \sqrt{(a_c + \kappa_i)^2 - 4\,(a_c\,\kappa_i - a_i\,\kappa_c)}} \qquad (1.4a.13)$$

Kon dus in par. 3 de verhouding tussen de hoeveelheden arbeid en kapitaal tussen bepaalde grenzen schommelen (bijv. $\frac{a_c}{\kappa_c} < \frac{\bar{l}}{\bar{k}} < \frac{a_i}{\kappa_i}$), in deze vierde beperking wordt gesteld, dat slechts één verhouding de "ideale" is. Dan alleen kan er evenwichtige groei zijn.
Hierbij kan men zich afvragen of het systeem dat in de beginperiode niet deze ideale verhouding heeft, automatisch tendeert naar een evenwichtige ontwikkeling. Deze vraag zal later verantwoord worden (zie o.a. par. 4 b).

De groeifactor

Mathematisch kan voor het stelsel differentievergelijkingen (1.4a.11) en (1.4a.12) een algemene oplossing worden bepaald. Deze algemene oplossing is echter niet de ideale oplossing, want zij impliceert nog geen evenwichtige groei à la Leontief. Uitgaande van de hypothese, dat er een toename is van de consumptiegoederen- en investeringsgoederenproduktie, dus van het aantal arbeiders en kapitaaleenheden in de loop van de tijd, wordt door Leontief gesteld, dat in een evenwichtige groeisituatie arbeid en kapitaal met hetzelfde percentage moeten toenemen.
Evenwichtige groei impliceert dus:

- groei van de produktiefactoren arbeid en kapitaal door netto produktie van zowel c- als i-goederen: de lijnen van Hawkins-Simon vallen niet samen (zie grafiek 8),
- een constant en voor arbeid en kapitaal gelijk groeipercentage: $\frac{\Delta\, l\,(t)}{l\,(t)} = \frac{\Delta\, k\,(t)}{k\,(t)}$
- volledige benutting van het arbeidspotentieel en de kapitaalgoederenvoorraad. Dan alleen is de voortbrenging van c- en i-goederen economisch verantwoord.

In appendix III is, uitgaande van de eisen welke Leontief aan dit dynamisch model stelt, de groeifactor bepaald. Met behulp van deze groeifactor wordt de ontwikkeling van arbeid en kapitaal aldus gedefinieerd (III,7):

$$l(t) = l(t_o) \left[1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)} \right]^t$$

(1.4a.16)

$$k(t) = k(t_o) \left[1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)} \right]^t$$

(1.4a.17)

Conclusie

Uit de resultaten van appendix III, zoals deze in het voorafgaande zijn weergegeven blijkt, dat de definitie van "evenwichtige groei" bepaalde verstrekkende gevolgen heeft. Groei à la Leontief is alleen mogelijk als in de beginperiode de hoeveelheden arbeid en kapitaal in een bepaalde verhouding in het produktieproces worden ingeschakeld. Na de condities, welke in de voorafgaande paragrafen werden afgeleid en welke kunnen worden samengevat in de derde conditie betreffende de verhouding van de produktiefactoren en de gecumuleerde quoten, is deze vierde beperking zeer stringent. Slechts één verhouding tussen arbeid en kapitaal maakt het mogelijk een groei à la Leontief te effectueren. Als deze verhouding aanwezig is, zal de relatieve toename van beroepsbevolking gelijk zijn aan die van de kapitaalgoederenvoorraad. Steeds is er dan full employment en volledige benutting van kapitaal. De groei van de factor kapitaal wordt mogelijk door de produktie van i-goederen, welke als breedte-investeringen de vraag naar complementaire arbeid vergroten. Door de produktie van consumptiegoederen groeit de beroepsbevolking.
De belangrijke vraag kan gesteld worden of de derde en vierde conditie, d.w.z. volledige inschakeling van de produktiefactoren én evenwichtige groei niet met elkaar in strijd zijn. De derde voorwaarde luidde $\frac{\alpha_c}{\kappa_c} \lesseqgtr \frac{\bar{l}}{\bar{k}} \lesseqgtr \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$ (zie (1.3.12) en (1.3.13)), terwijl de zo juist afgeleide vierde conditie luidt:

$$\frac{l\ (t_o)}{k\ (t_o)} = \frac{2\ \alpha_i}{-\ \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}} \qquad (1.4a.13)$$

Wiskundig is gemakkelijk te bewijzen, dat deze laatste verhouding van arbeid en kapitaal gelegen is tussen die van $\frac{\alpha_c}{\kappa_c}$ en $\frac{\alpha_i}{\kappa_i}$.

De genoemde condities zijn dus niet met elkaar in strijd. De vierde beperkt de factorverhouding tot één punt uit het vlak van de mogelijkheden, welke in de derde voorwaarde worden aangegeven. Zoals bij de behandeling van de groeifactor naar voren gebracht is, zal, als aan de voorgeschreven verhouding van de produktiefactoren in de beginperiode is voldaan, de toename van arbeid en kapitaal evenwichtig zijn. Kwantitatief is de algemene groeivoet, zoals uit de vergelijkingen (1.4a.16) en (1.4a.17) blijkt, per periode gelijk aan

$$\frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} \times 100\ \%.$$

Voor de theorie, welke uitgaat van complementariteit tussen de produktiefactoren en een constant technisch kunnen, is in de voorafgaande paragrafen de invloed van de techniek op de produktie en op de prijzen naar voren gebracht. Thans blijkt hoe sterk ook de invloed van de techniek in de dynamische theorie is. Zowel de vierde conditie over de verhouding van de hoeveelheden arbeid en kapitaal in de beginperiode, als de groeivoet zijn gedefinieerd met behulp van technische coëfficiënten.

De prijzen

Ook in de prijsstructuur treedt in dit dynamische model een verandering op. Voor elke periode gelden thans bepaalde prijzen, zodat er naast p (t) ook p (t + 1) is.
Het produktieproces werkt in de beginperiode (t_o) met kapitaal en arbeid. Met behulp van de gegeven hoeveelheid arbeid en kapitaal ontstaat na de produktie van c_{netto} en i_{netto} en de vervanging van de verbruikte eenheden een groter aantal eenheden l en k in de volgende periode. Stelt men nu dat zowel de prijs van de eindprodukten als die van de produktiefactoren in de loop der jaren

gelijk blijven, dan is bijvoorbeeld de prijs van één eenheid c in (t) gelijk aan die in (t + 1). Algemeen dus

$$p_c\ (t) = p_c\ (t + 1) \tag{1.4a.18}$$

$$p_i\ (t) = p_i\ (t + 1) \tag{1.4a.19}$$

$$p_L\ (t) = p_L\ (t + 1) \tag{1.4a.20}$$

$$p_R\ (t) = p_R\ (t + 1) \tag{1.4a.21}$$

Het is nu alleen verantwoord de produktiefactor in een bepaalde periode aan te kopen en in te schakelen (dus niet met de inschakeling te wachten tot de volgende periode) als naast het onderhoud in feite ook rendement over het geinvesteerde geld wordt ontvangen. Als men het onderhoud van één eenheid arbeid in (t) op een eenheid c stelt en de vervanging van één verbruikte kapitaaleenheid op één i, is de reproduktiewaarde van arbeid in (t) gelijk aan p_c (t) en de vervangingswaarde van één eenheid kapitaal aan p_i (t). In beide industrieën gelden dan dezelfde onderhoudskosten en vervangingskosten, omdat onderhoud c.q. vervanging in elke industrie gelijk is.
Daar verder steeds verondersteld is, dat arbeid homogeen is, is substitutie van deze factor tussen de produktieprocessen mogelijk en is de meerwaarde, welke uitgaat boven de kosten van levensonderhoud, overal gelijk. Hetzelfde geldt voor kapitaal. De bruto opbrengst per arbeider, opgebouwd uit kosten voor levensonderhoud en meerwaarde, is dus overal gelijk: $\bar{p}_{Lc} = \bar{p}_{Li} = \bar{p}_L$. Zo is $\bar{p}_{Rc} = \bar{p}_{Ri} = \bar{p}_R$.
Uit (1.3.24) t/m (1.3.27) volgt bij de gegeven veronderstellingen:

$$\bar{p}_L\ (t) = p_L\ (t) + p_c\ (t) \tag{1.4a.22}$$

$$\bar{p}_R\ (t) = p_R\ (t) + p_i\ (t) \tag{1.4a.23}$$

De bruto opbrengstwaarde van arbeid en kapitaal is m.a.w. hoger dan de reproduktiewaarde c.q. vervangingswaarde, omdat het anders niet denkbaar is dat men arbeid en kapitaal vermeerdert.

Als evenwichtsvoorwaarde voor een evenwichtig prijssysteem geldt nu, dat het reële rendement voor beide produktiefactoren gelijk moet zijn, d.w.z. dat de opbrengstwaarde van arbeid gedeeld door de reproduktiewaarde niet mag afwijken van de opbrengstwaarde van kapitaal gedeeld door de waarde van de vervanging van de verbruikte eenheid.

Dit is logisch: als alle meerwaarde wordt gebruikt voor vermeerdering van arbeid en alle meerwaarde van kapitaal voor de vermeerdering van kapitaal, dan moeten de desbetreffende rendementen aan elkaar gelijk zijn. Dan alleen kan er sprake zijn van een evenwichtige groei van de produktiefactoren:

$$k\ (t)\ p_R\ (t) = i_{netto}\ (t)\ p_i\ (t) = \Delta\ k\ (t)\ p_i\ (t)$$

$$l\ (t)\ p_L\ (t) = c_{netto}\ (t)\ p_c\ (t) = \Delta\ l\ (t)\ p_c\ (t)$$

als dus $\dfrac{\Delta\ k\ (t)}{k\ (t)} = \dfrac{\Delta\ l\ (t)}{l\ (t)}$ dan is $\dfrac{p_R\ (t)}{p_i\ (t)} = \dfrac{p_L\ (t)}{p_c\ (t)}$.

Definieert men het bruto feitelijk rendement als

$$\frac{\bar{p}_R\ (t)}{p_i\ (t)} = \frac{\bar{p}_L\ (t)}{p_c\ (t)} = r \tag{1.4a.24}$$

dan volgt uit (1.4a.22) t/m (1.4a.24)

$$\left.\begin{aligned} r\ p_c\ (t) &= p_L\ (t) + p_c\ (t) \\ r\ p_i\ (t) &= p_R\ (t) + p_i\ (t) \end{aligned}\right] \text{ of } \quad \left.\begin{aligned} p_L\ (t) &= (r - 1)\ p_c\ (t) \\ p_R\ (t) &= (r - 1)\ p_i\ (t) \end{aligned}\right]$$

Analoog met (1.3.28) en (1.3.29) geldt bovendien:

$$p_c\ (t) = \alpha_c\ p_L\ (t) + \kappa_c\ p_R\ (t) \tag{1.4a.25}$$

$$p_i\ (t) = \alpha_i\ p_L\ (t) + \kappa_i\ p_R\ (t) \tag{1.4a.26}$$

Derhalve is:

$$p_L\ (t) = (r - 1)\ \{\alpha_c\ p_L\ (t) + \kappa_c\ p_R\ (t)\} \tag{1.4a.27}$$

$$p_R\ (t) = (r - 1)\ \{\alpha_i\ p_L\ (t) + \kappa_i\ p_R\ (t)\} \tag{1.4a.28}$$

Kiest men de eenheid arbeid zodanig dat $p_L\ (t) = 1$, dan kan uit (1.4a.27) en (1.4a.28) het netto rendement worden afgeleid:

$$r - 1 = \frac{\alpha_c + \kappa_i \pm \sqrt{(-\alpha_c - \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}$$

Rekening houdend met (1.4a.16) en (1.4a.17) en met de stelling dat het bruto rendement 1 hoger is dan het netto rendement is:

$$r = 1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} \qquad (1.4a.29)$$

Het bruto rendement (r) en de groeifactor (ρ) zijn blijkbaar aan elkaar gelijk als de totale netto produktie gebruikt wordt voor de vermeerdering van de produktiefactoren.

Bij een groeivoet van bijvoorbeeld 4 % is het netto rendement van de produktiefactoren ook 4 %. In een stationaire toestand wordt er geen rendement gemaakt, terwijl bij een teruggang $r < 1$ is.
Met de conclusie, welke Von Neumann uit zijn model[1] trekt:
"The interest factor and the coefficient of expansion of the economy are equal and uniquely determined by the technically possible processes", kan men het nu, onder de gegeven hypothesen volledig eens zijn.
Het was de bedoeling het specifiek karakter van deze hypotheses scherp in het licht te stellen. M.n. de bevolkings- en spaartheorie, waarop dit model gebaseerd is, zijn ver van de realiteit verwijderd.

Het gereduceerde model

Gedefinieerd in gecumuleerde quoten wordt het model nu:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_c\ \{\overset{dl}{l\ (t + 1)} - l\ (t)\} + \alpha_i\ \{\overset{dk}{k\ (t + 1)} - k\ (t)\} &= l\ (t) \qquad (1.4a.11) \\ \kappa_c\ \{l\ (t + 1) - l\ (t)\} + \kappa_i\ \{k\ (t + 1) - k\ (t)\} &= k\ (t) \qquad (1.4a.12) \end{aligned}\right]$$

1) J. v. Neumann, Review of Economic Studies, vol. 13, pag. 8.

$$\left.\begin{aligned} p_L (t) &= (r - 1) \{\alpha_c \, p_L (t) + \kappa_c \, p_R (t)\} \\ p_R (t) &= (r - 1) \{\alpha_i \, p_L (t) + \kappa_i \, p_R (t)\} \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} &(1.4a.27) \\ &(1.4a.28) \end{aligned}$$

De voorwaarde van evenwichtige groei is:

$$\frac{l\ (t_o)}{k\ (t_o)} = \frac{2\ \alpha_i}{- \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}} \qquad (1.4a.18)$$

De groeifactor en het bruto rendement zijn:

$$\rho = r = 1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}$$

(1.4a.16), (1.4a.17) en (1.4a.29)

Cijfervoorbeeld 5

Gegeven : $\bar{\alpha}_c = 3/5$ $\qquad \bar{\alpha}_i = 7/20$

$\bar{\kappa}_c = 3/5$ $\qquad \bar{\kappa}_i = 1/5$

$O_{cc} = 1$ $\qquad O_{ci} = 1$

$V_{ic} = 1$ $\qquad V_{ii} = 1$

$\bar{l}\ (t_o) = 110$ $\qquad p_L\ (t) = 1$

Gevraagd : de grootte van k (t_o), waarbij een evenwichtige groei mogelijk is;
de groeifactor, het bruto rendement en de prijzen;
de tabel van de middelen en bestedingen.

Oplossing: $\alpha_c = 69/11$ $\qquad \alpha_i = 35/11$

$\kappa_c = 60/11$ $\qquad \kappa_i = 29/11$

(zie (1.3.8) t/m (1.3.11)).

$$\frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} = \frac{2\ \alpha_i}{-\ \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}} = 7/6$$

(1.4a.13)

dus $k\ (t_o) = 94\ 2/7$

$$\rho = r = 1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} = 10/9$$

(1.4a.16), (1.4a.29)

$\bar{p}_L\ (t) = 10$ $\qquad$ $\bar{p}_R\ (t) = 5$

$p_L\ (t) = 1$ $\qquad$ $p_R\ (t) = 1/2$

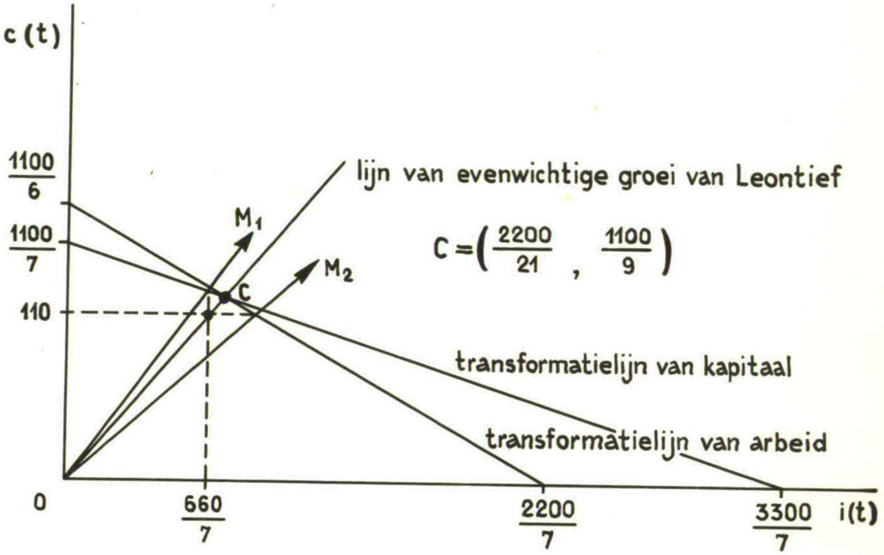
$p_c\ (t) = 9$ $\qquad$ $p_i\ (t) = 4\ 1/2$

Tabel van middelen en bestedingen

(de bestedingen in t leveren de middelen op in (t + 1))

t_o		t_1	
Middelen			
$\bar{l}\ (t_o) \times p_c\ (t_o)$: 110 x 9	= 990,0	$l\ (t_1) \times p_c\ (t_1)$: 10/9 . 110 . 9	= 1100,0
$\bar{k}\ (t_o) \times p_i\ (t_o)$: 94 2/7 x 4,5	= 424,3	$k\ (t_1) \times p_i\ (t_1)$: 10/9 . 94 2/7 . 4,5	= 471,4
subtotaal	1414,3	subtotaal	1571,4
$\Delta\ y\ (t_o)$ (abs. rendement) 1/9 x 1414,3	157,1		
	1571,4		
Bestedingen			
$c\ (t_o) \times p_c\ (t_o)$ = 122 2/9 . 9	= 1100,0		
$i\ (t_o) \times p_i\ (t_o)$ = 104 16/21 . 4 1/2	= 471,4		
	1571,4		

Grafiek 10. Cijfervoorbeeld 5.



Toelichting op grafiek 10:

In de grafiek blijkt de rechte lijn van de oorsprong naar het punt $(i = \frac{2200}{21}, c = \frac{1100}{9})$ door het punt $(i_{verv.}, c_{verv.})$ te gaan. Zo wordt weergegeven, dat de verhouding van de benodigde hoeveelheid consumptie- en investeringsgoederen voor vervanging van de verbruikte produktiefactoren gelijk is aan die van de hoeveelheden welke gebruikt worden om arbeid en kapitaal uit te breiden. Steeds zal de verhouding van arbeid en kapitaal gelijk blijven aan die van de beginperiode (zie: (1.4a.13)), omdat de relatieve toename van arbeid en die van kapitaal per periode gelijk is: zie (1.4a.16) en (1.4a.17).

b) De voorwaarden van Georgescu-Roegen

Inleiding

De voorwaarden welke in par. 4a ontwikkeld zijn, zijn zeer stringent. De technische coëfficiënten bepalen de noodzakelijke verhouding tussen de hoeveelheden arbeid en kapitaal in de periode t_0.
Alleen bij een ideale uitgangssituatie zal deze verhouding aanwezig zijn en is er van evenwichtige groei à la Leontief sprake.
In navolging van een artikel van Georgescu-Roegen in "Activity Analysis of Production and Allocation" (ed. Tj.C. Koopmans)[1] zal nu de mate van abstractie in het dynamische model worden beperkt. Thans wordt alleen geëist dat arbeid en kapitaal in de beginperiode volledig ingeschakeld zijn, zodat slechts aan drie, eerder geformuleerde, voorwaarden voldaan behoeft te worden. De derde samenvattende voorwaarde bepaalde, dat de verhouding van arbeid en kapitaal moet liggen tussen de verhouding van de gecumuleerde quoten van de arbeidsintensieve en die van de kapitaalintensieve techniek (zie o.a. (1.3.12) en (1.3.13)). De in het dynamische model van Leontief ontwikkelde vierde voorwaarde (zie (1.4a.13)) vervalt dus.
Uitgaande van full employment en full capacity in de beginperiode wordt in dit onderdeel van deze paragraaf een groeimodel ontwikkeld. Bij de bespreking zal echter blijken dat in de loop van de tijd de eis van volledige inschakeling van de produktiefactoren niet gehandhaafd kan worden. Wel wordt ook hier gesteld dat door netto c-goederen het arbeidspotentieel en door uitbreidingsinvesteringen de kapitaalgoederenvoorraad toeneemt. Het probleem onder welke voorwaarden dan werkloosheid of kapitaalovervloed kan ontstaan, zal hier speciale aandacht krijgen.
Als echter arbeid of kapitaal absoluut overvloedig wordt, zal aan de voorwaarde, dat de verhouding van arbeid en kapitaal moet liggen tussen de verhoudingen van de gecumuleerde quoten (3e voorwaarde), niet meer kunnen worden voldaan. Toch is dit een eis welke ook in dit model gehandhaafd moet worden, omdat anders de produktie van c of i te laag zal zijn om de vervanging van de verbruikte eenheden te kunnen garanderen. Voortzetting van de pro-

1) pag. 116 - 131.

duktie volgens het bestaande systeem is dan, zoals zal blijken, onmogelijk. Daarom moeten de produktiefactoren op een andere wijze worden aangewend. Alle netto produktie dient dan gericht te worden op die produktiefactor, welke tijdens de groei achtergebleven is. Is bijvoorbeeld arbeid te sterk toegenomen dan zal de netto produktie alleen uit investeringsgoederen bestaan. Het model wordt dus gewijzigd. Vóór en na het moment, waarop één factor relatief overvloedig dreigt te worden, gelden andere produktieregimes[1].
Om het omslagpunt van het ene regime naar het andere exact vast te stellen, is het nodig te werken met differentiaalvergelijkingen d.w.z. met oneindige kleine tijdseenheden. De omslag komt nl. reeds als overvloed dreigt te ontstaan. Bij een lange produktieperiode kan er, hoewel er in het begin van de periode van overvloed nog geen sprake is, door een hoge produktie tijdens het proces, na afloop grote overvloed van één factor zijn. Kiest men echter kortere periodes dan zal het produktieresultaat per periode lager zijn, zodat een dreigende overvloed direct gesignaleerd wordt.

Het model

Uitgangspunt van de analyse is het volgende model (zie (1.4a.1) t/m (1.4a.6)):

$$\mu_{cc}\, c\,(t) + \mu_{ci}\, i\,(t) + c_{netto}\,(t) = c\,(t) \qquad (1.4b.1)$$

$$\mu_{ic}\, c\,(t) + \mu_{ii}\, i\,(t) + i_{netto}\,(t) = i\,(t) \qquad (1.4b.2)$$

$$\bar{\alpha}_c\, c\,(t) + \bar{\alpha}_i\, i\,(t) = \bar{l}\,(t) \qquad (1.4b.3)$$

$$\bar{\kappa}_c\, c\,(t) + \bar{\kappa}_i\, i\,(t) = \bar{k}\,(t) \qquad (1.4b.4)$$

$$c_{netto}\,(t) = \frac{dl}{dt} \qquad (1.4b.5)$$

$$i_{netto}\,(t) = \frac{dk}{dt} \qquad (1.4b.6)$$

Gegeven: $\bar{l}\,(t_o)$ en $\bar{k}\,(t_o)$. gewenste evenwichtswaarde $\frac{l_{t_0}}{k_{t_0}}$, dan $\bar{k}_{t_0}$ gegeven

1) In navolging van de moderne fysica duidt Georgescu-Roegen het verschijnsel aan met het woord "relaxation".

Randgevallen

Voordat op de ontwikkelingslijn van Georgescu-Roegen wordt ingegaan, zullen eerst, in navolging van het eerder geciteerde artikel, enkele randgevallen worden behandeld:

1) $$\frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}} < \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}} \tag{1.4b.7}$$

Zoals bij de behandeling van de condities van Hawkins-Simon is uiteengezet (zie (1.3.5)), houdt deze verhouding van de materiaalquoten in, dat voor de onderlinge levering meer produkten nodig zijn dan in het produktieproces worden voortgebracht. De hoeveelheid arbeid en kapitaal zal daarom afnemen.

2) $$\frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}} = \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}} \tag{1.4b.8}$$

Het produktiegebied, dat begrensd wordt door de lijnen, welke door de condities van Hawkins-Simon worden bepaald, wordt nu beperkt tot één lijn. Slechts als het snijpunt van de transformatielijn van arbeid en kapitaal samenvalt met de lijn

$$c\ (t) = \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}}\ i\ (t) = \frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}}\ i\ (t) \tag{1.4b.9}$$

is volledige inschakeling van arbeid en kapitaal mogelijk. Dit houdt in dat

$$\frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} = \frac{\bar{\alpha}_c\ \mu_{ci} + \bar{\alpha}_i\ (1 - \mu_{cc})}{\bar{\kappa}_c\ \mu_{ci} + \bar{\kappa}_i\ (1 - \mu_{cc})} \tag{1.4b.10}$$

Hier is uitsluitend sprake van reproduktie van verbruikte kapitaal- en arbeidseenheden. De voorraad produktiefactoren neemt toe noch af (statisch evenwicht). Er is geen meerwaarde. Men heeft hier te doen met het eenvoudige reproduktieschema, zoals dat door Marx werd opgesteld.
Indien echter in de beginperiode één van de produktiefactoren overvloedig zou zijn, zal er wanneer alleen die hoeveelheden

produktiemiddelen voor onderhoud c.q. vervanging in aanmerking komen welke produktief zijn, door slijtage van de overvloedige factor na een bepaalde tijd evenwicht ontstaan. De lijn, waarlangs de ontwikkeling naar dat evenwicht verloopt, is de transformatielijn van de schaarse factor.

3) $$\frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}} > \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}} \quad \text{en} \quad \bar{\alpha}_c : \bar{\kappa}_c = \bar{\alpha}_i : \bar{\kappa}_i \qquad (1.4b.11)$$

Onder deze veronderstelling zullen de transformatielijnen van arbeid en kapitaal, ofwel evenwijdig lopen, ofwel samenvallen. In het eerste geval is kapitaal of arbeid overvloedig, terwijl in het tweede geval de keuze tussen c en i, dus de toename van l en k, niet te bepalen is. Een aanvullende vergelijking, bijvoorbeeld een specifieke spaarfunctie, is dan nodig om het model af te ronden. In vele macro-economische modellen bijv. in dat van Ricardo, wordt impliciet met deze derde hypothese gewerkt. Vele moeilijkheden worden dan echter ten onrechte omzeild.

De algemene oplossing

Ziet men van deze uitzonderingsgevallen af en veronderstelt men dus dat

$$\frac{1 - \mu_{ii}}{\mu_{ic}} > \frac{\mu_{ci}}{1 - \mu_{cc}} \quad \text{en} \quad \bar{\alpha}_c : \bar{\kappa}_c \neq \bar{\alpha}_i : \bar{\kappa}_i$$

dan is het vergelijkingenstelsel (1.4b.1) t/m (1.4b.6) naar analogie van het dynamisch model van Leontief (zie (1.4a.11) en (1.4a.12)) met behulp van gecumuleerde factorquoten terug te brengen tot:

$$\alpha_c \frac{dl}{dt} + \alpha_i \frac{dk}{dt} = l\ (t) \qquad (1.4b.12)$$

$$\kappa_c \frac{dl}{dt} + \kappa_i \frac{dk}{dt} = k\ (t) \qquad (1.4b.13)$$

Zoals in appendix III (zie (III,14) en (III,15)) is weergegeven, is de oplossing van dit stelsel:

$$l\ (t) = A_1\ e^{\rho_1 t} + A_2\ e^{\rho_2 t} \tag{1.4b.14}$$

$$k\ (t) = B_1\ e^{\rho_1 t} + B_2\ e^{\rho_2 t} \tag{1.4b.15}$$

Hierbij is (zie (III,13), (III,16) t/m (III,19)):

$$A_1 = \frac{-\,2\ \alpha_i\ \bar{k}(t_o) + \{-\,\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}\}\ \bar{l}(t_o)}{2\ \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}$$

$$A_2 = \frac{2\ \alpha_i\ \bar{k}(t_o) + \{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}\}\ \bar{l}(t_o)}{2\ \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}$$

$$B_1 = \frac{\{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}\}\ \bar{k}(t_o) - 2\ \kappa_c\ \bar{l}(t_o)}{2\ \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}$$

$$B_2 = \frac{\{-\,\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}\}\ \bar{k}(t_o) + 2\ \kappa_c\ \bar{l}(t_o)}{2\ \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}$$

$$\rho_1 = \frac{\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_1)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}$$

Afhankelijk van de variabelen A, B en ρ doen zich twee mogelijkheden voor. Welke mogelijkheid in feite gerealiseerd wordt, hangt als $\bar{l}\ (t_o)$ en $\bar{k}\ (t_o)$ gegeven zijn, af van de verhouding van de factorquoten.

1e Mogelijkheid: stabiel evenwicht

Als $\alpha_c\ \kappa_i < \alpha_i\ \kappa_c$ d.w.z. wanneer de c-industrie meer kapitaal per eenheid eist dan de i-produktie en i arbeidsintensiever wordt geproduceerd dan c, ontstaat er een stabiel evenwicht.

Nu is

$$\rho_1 = \frac{\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} < 0$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} > 0$$

Afhankelijk van de verhouding tussen $l\ (t_o)$ en $k\ (t_o)$ blijft het systeem of voortdurend in evenwicht, nl. als ook hier direct geldt (zie (1.4a.13))

$$\frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} = \frac{2\ \alpha_i}{-\ \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}$$

(d.i. de voorwaarde voor een onmiddellijke evenwichtige groei van Leontief) of het tendeert automatisch naar dit evenwicht[1].

---

1) $e^{\rho_1 t}$ nadert uiteindelijk tot 0. Zodoende wordt dus $\frac{l\ (t)}{k\ (t)} =$

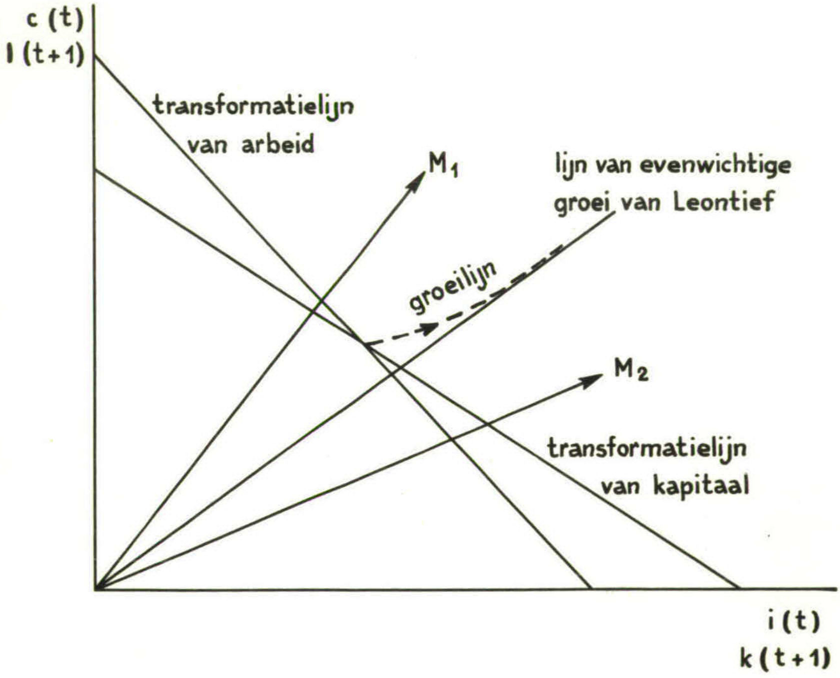
$$\frac{A_2\ e^{\rho_2 t}}{B_2\ e^{\rho_2 t}} = \frac{A_2}{B_2} = \text{constant (zie (1.4b.14) en (1.4b.15))}.$$

ρ_2 is uiteindelijk de stabiele groeifactor.

Tijdens deze ontwikkeling zal arbeid en kapitaal steeds volledig ingeschakeld blijven, indien in de beginsituatie aan de derde, reeds toegelichte, voorwaarde voldaan wordt, nl.

$$\frac{\alpha_c}{\kappa_c} < \frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} < \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$$

Grafiek 11. De ontwikkeling volgens Georgescu-Roegen, als $\alpha_c x_i < \alpha_i x_c$



Zoals in grafiek 11, door de gestippelde groeilijn is weergegeven, zal het snijpunt van de transformatielijnen in de loop van de tijd tenderen naar de lijn van de evenwichtige groei van Leontief. Ook wanneer in de beginsituatie het snijpunt van de transformatielijnen onder de evenwichtslijn ligt, zal deze ont-

wikkeling zich voordoen. De economische verklaring voor deze tendentie naar een evenwichtige groei luidt als volgt: Het uitgangspunt, nl. $\alpha_c \kappa_i < \alpha_i \kappa_c$, houdt in dat de consumptiegoederenindustrie relatief arbeidsextensief is, de i-produktie daarentegen relatief arbeidsintensief. De c-produktie leidt verder, in de gegeven veronderstellingen, tot vergroting van het arbeidspotentieel (zij kan dus als het ware gezien worden als "produktie" van arbeid), terwijl de produktie van i-goederen uiteraard de kapitaalgoederenvoorraad verhoogt.
Is nu in de beginperiode de hoeveelheid arbeid relatief groter dan voor produktie op de evenwichtslijn nodig is, dan zal, bij volledige aanwending van arbeid en kapitaal, de arbeidsintensieve techniek ook relatief meer worden toegepast. De relatief arbeidsintensieve techniek echter wordt toegepast in de i-industrie. Derhalve zal de produktie van kapitaalgoederen hoger zijn dan op de evenwichtslijn van Leontief. De voorsprong van de factor arbeid wordt aldus kleiner, zodat er een ontwikkeling is naar de ideale verhouding van arbeid en kapitaal.
Hetzelfde geldt als kapitaal in de beginperiode relatief overvloedig is t.o.v. arbeid. De kapitaalintensieve techniek, d.w.z. de produktie van de consumptiegoederen, te zien als "produktie" van arbeid, zal dan de voorkeur hebben, zodat er relatief meer arbeiders dan kapitaalgoederen aan de voorraad produktiefactoren worden toegevoegd. Dit zal voortgaan, totdat wederom de evenwichtige verhouding tussen arbeid en kapitaal is bereikt. Daarna zal de verhouding tussen c- en i-produktie niet meer veranderen. Deze verhouding is dan zodanig, dat de relatieve toename van arbeid en kapitaal evenmin verandert. Zowel de produktieverhouding als de beschikbaarheidsverhouding van de produktiefactoren is dan in overeenstemming met die van de lijn van evenwichtige groei van Leontief.

2e Mogelijkheid: onstabiel evenwicht

Als i kapitaalintensiever geproduceerd wordt dan c en c arbeidsintensiever is dan i, dus als $\alpha_c \kappa_i > \alpha_i \kappa_c$ is

$$\rho_1 = \frac{\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\,(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)} > 0$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} > 0$$

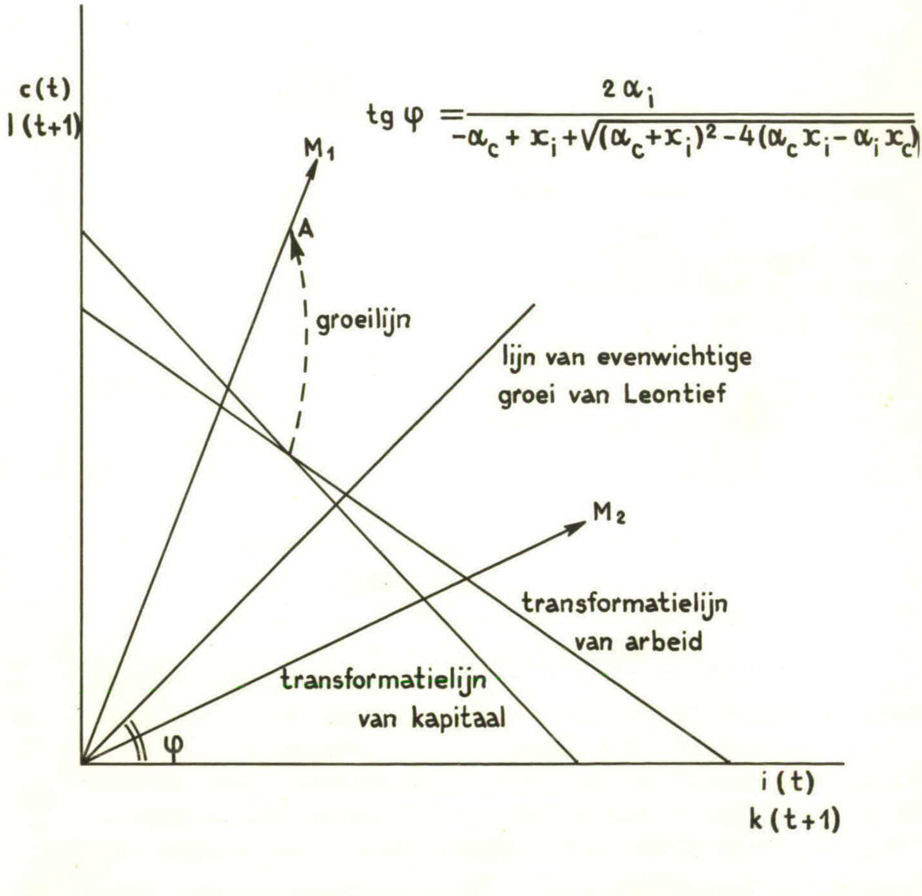
De beide exponenten van e in (1.4b.14) en (1.4b.15) zijn dus positief. Dit betekent, dat er een labiel dynamisch evenwicht is: de ene produktiefactor breidt zich uit ten koste van de andere, totdat de laatste geheel verdwenen is. De verklaring hiervoor is, dat bij een relatieve overvloed van arbeid in de beginperiode de arbeidsintensieve techniek, d.w.z. de produktie van c-goederen uitgebreid wordt, zodat door de hierdoor geïnduceerde toename van arbeid het arbeidspotentieel nog groter wordt ten koste van de produktiefactor kapitaal. Indien daarentegen kapitaal overvloedig is, wordt bij de gegeven verhouding van de produktiecoëfficiënten de produktie van investeringsgoederen gestimuleerd, waardoor kapitaal nog overvloediger wordt.

Een dergelijke ontwikkeling zou inhouden, dat na een bepaalde tijd niet meer aan de drie voorwaarden wordt voldaan, welke in de vorige paragraaf ontwikkeld zijn (de condities van Hawkins-Simon, de voorwaarde betreffende de verhouding van produktiefactoren en directe factorquoten en de voorwaarde betreffende de verhouding der produktiefactoren en de gecumuleerde quoten).
Het overschrijden van de derde samenvattende voorwaarde betekent bij een te groot arbeidspotentieel, dat

$\frac{l\ (t)}{k\ (t)} > \frac{\alpha_c}{\kappa_c}$ als $\alpha_c\ \kappa_i > \alpha_i\ \kappa_c$. In grafiek 12 wordt deze situatie bereikt direct na het punt A. (In A geldt uiteraard: $\frac{l\ (t)}{k\ (t)} = \frac{\alpha_c}{\kappa_c}$.)
Op dit moment ontstaat een situatie van absolute arbeidsovervloed. De ontwikkeling naar het punt A toe steunde mede op de veronderstelling van gedurige volledige inschakeling van alle produktiefactoren, hetgeen dus inhoudt dat de door de netto c-produktie geinduceerde toename van arbeid telkens weer in zijn geheel in het produktieproces kon worden ingeschakeld en dat de tewerkgestelde arbeiders hun minimum levensmiddelenpakket kregen. Blijft men echter vasthouden aan de gestelde voorwaarde betreffende de verhouding der produktiefactoren ten opzichte van die der gecumuleerde quoten, nl. $\frac{l\ (t)}{k\ (t)} \leqslant \frac{\alpha_c}{\kappa_c}$, m.a.w. laat men de voorwaarde van netto produktie en onderhoud van de tewerkgestelde arbeiders prevaleren boven de veronderstelling van volledige inschakeling

van de produktiefactoren dan zal blijken, dat het produktieregime gaat veranderen. In dit geval zal de groeilijn de lijn M_1 wel raken (punt A) doch niet snijden. Door de botsing met de lijn M_1 komt er in punt A een breuk in de ontwikkeling. Het gedeelte vóór A wordt door andere wetten beheerst dan het gedeelte er na. Dit tweede regime zal thans nader worden beschreven.

Grafiek 12. De ontwikkeling volgens Georgescu-Roegen, als $\alpha_c x_i > \alpha_i x_c$ (eerste regime)



Indien aan de netto produktie van c-goederen een einde komt, omdat arbeid absoluut overvloedig wordt, terwijl toch het levensmiddelenpakket van alle, al dan niet tewerkgestelde, arbeiders gegarandeerd moet blijven, kan het model als volgt worden opgebouwd:

$$\mu_{cc}\ c\ (t) + \mu_{ci}\ i\ (t) + \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}\ l_{ov.}\ (t) = c\ (t) \qquad (1.4b.16)$$

$$\mu_{ic}\ c\ (t) + \mu_{ii}\ i\ (t) + i_{netto}\ (t) = i\ (t) \qquad (1.4b.17)$$

$$\bar{\kappa}_c\ c\ (t) + \bar{\kappa}_i\ i\ (t) = \bar{k}\ (t) \qquad (1.4b.18)$$

$$i_{netto}\ (t) = \frac{dk}{dt} \qquad (1.4b.19)$$

Indien $\bar{\alpha}_c\ c\ (t) + \bar{\alpha}_i\ i\ (t) = l\ (t) < \bar{l}\ (t)$ (1.4b.20)

(d.w.z. arbeid is overvloedig) kan de werkloosheid ($l_{ov.}$) gedefinieerd worden als

$$l_{ov.}\ (t) = \bar{l}\ (t) - l\ (t) \qquad (1.4b.21)$$

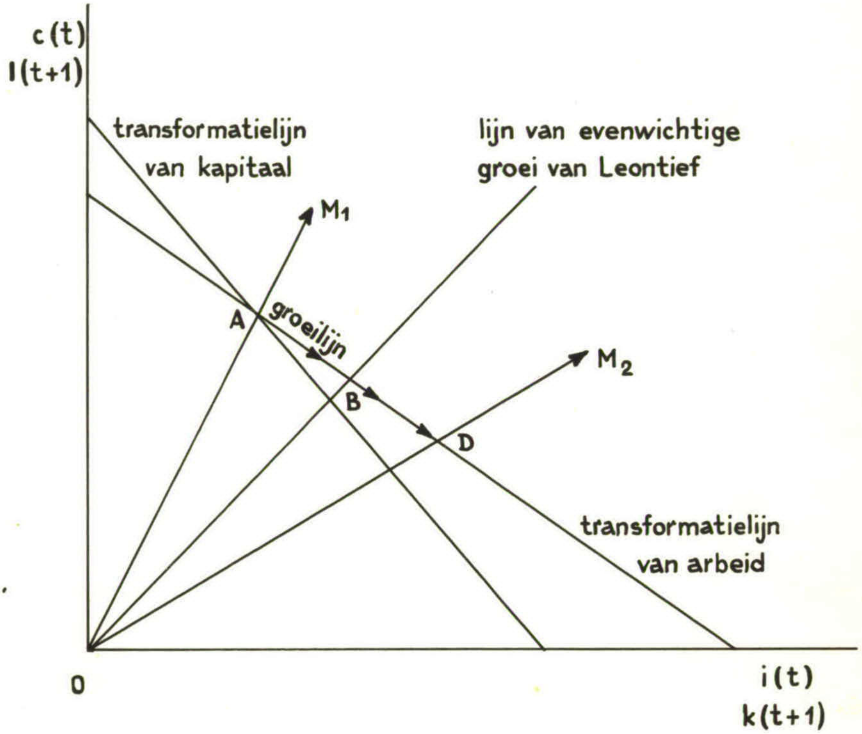
$$c_{netto}\ (t) = \frac{dl}{dt} = 0 \qquad (1.4b.22)$$

Het onderhoudspakket van $l_{ov.}$ is: $\frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c} = 0_{cc}$ (1.4b.23)

De grafische voorstelling vindt men in grafiek 13 (pag. 75).

In het nieuwe regime neemt de produktiefactor arbeid niet meer toe. De voortbrenging van goederen zal door de netto produktie van investeringsgoederen alleen gericht zijn op de toename van kapitaal. Het gevolg hiervan is, dat het niveau van de transformatielijn van arbeid gelijk blijft, terwijl de transformatielijn van kapitaal naar rechts verschuift (de hoeveelheid kapitaal neemt toe). Zoals grafiek 13 in samenhang met grafiek 12 aantoont, vertoont de ontwikkeling daarom in het punt A een breuk. Vanaf dat moment buigt de groeilijn af omdat het snijpunt

Grafiek 13. De ontwikkeling volgens Georgescu-Roegen, als $\alpha_c x_i > \alpha_i x_c$ (tweede regime)



van beide transformatielijnen via de vaste transformatielijn van arbeid verloopt. In punt B wordt het evenwicht van Leontief bereikt, zodat, indien op dat moment, het eerste model weer zou gelden (volledige inzet van arbeid), de ontwikkeling verder evenwichtig blijft. Indien echter het tweede regime (uitsluitend netto i-produktie) wordt aangehouden, zal de ontwikkeling het verlengde van de lijn A B volgen, totdat de lijn M_2 wordt bereikt (punt D).

Bij de toelichting op grafiek 12 werd van een te groot arbeidspotentieel uitgegaan. Dit geldt eveneens voor die punten van de groeilijn die in grafiek 13 vóór punt B liggen. Voorbij dit snijpunt met de lijn van de evenwichtige groei van Leontief heerst

daarentegen een relatieve overvloed aan kapitaal. Het zal duidelijk zijn dat vanaf dit moment de ontwikkeling geheel analoog is aan die welke in het voorafgaande is beschreven op basis van een relatieve overvloed aan arbeid.
Wanneer de investeringsgoederen relatief kapitaalintensief worden voortgebracht, zal onder de voorwaarde van volledige inschakeling der produktiefactoren een relatieve kapitaalovervloed steeds toenemen totdat de groei tenslotte in punt D in strijd komt met de voorwaarde $\frac{l\ (t)}{k\ (t)} \geqslant \frac{\alpha_i}{\kappa_i}$. Op dat moment zal wederom met een ander model moeten worden gewerkt.
Dit regime kan als volgt worden beschreven:

$$\mu_{cc}\ c\ (t) + c_{netto}\ (t) = c\ (t) \tag{1.4b.24}$$

$$\bar{\alpha}_c\ c\ (t) = l\ (t) \tag{1.4b.25}$$

$$c_{netto} = \frac{dl}{dt} \tag{1.4b.26}$$

$$\text{terwijl: } i\ (t) = 0 \tag{1.4b.27}$$

$$\bar{\kappa}_c\ c\ (t) = k\ (t) < \bar{k}\ (t) \tag{1.4b.28}$$

Alleen de produktiefactor arbeid neemt toe, terwijl de kapitaalgoederenvoorraad afneemt. De ontwikkelingslijn vertoont nu wederom een breuk. Eventueel kan daarna de lijn van de evenwichtige groei van Leontief vervolgd worden, doch vanwege de geconstateerde labiliteit is dit niet zeker.

Slotopmerking

In de voorafgaande analyses werd steeds, na de beschrijving van de produktiestructuur, aandacht geschonken aan de prijzen. Vanwege de gecompliceerdheid van de groeifactor, zal hier echter van deze beschouwing worden afgezien, mede omdat de voorafgaande beschouwing over het model van Georgescu-Roegen gezien moet worden als een uitbreiding van de analyses van Leontief voor wat de produktiestructuur betreft, m.n. in verband met de vergelijking (1.4a.13).

Cijfermodel 6

Gegeven : $\bar{\alpha}_c = 3/5$ $\bar{\alpha}_i = 7/20$ $\mu_{cc} = 3/5$ $\mu_{ci} = 7/20$

$\bar{\kappa}_c = 3/5$ $\bar{\kappa}_i = 1/5$ $\mu_{ic} = 3/5$ $\mu_{ii} = 1/5$

$l\ (t_o) = 110$ $k\ (t_o) = 93$

Gevraagd : l (t) en k (t)

Oplossing : $\alpha_c = 69/11$ $\alpha_i = 35/11$

(zie cijfervoorbeeld 5)

$\kappa_c = 60/11$ $\kappa_i = 29/11$

$$l\ (t) = 9/20\ e^{-9\ t} + 109\ 11/20\ e^{1/9\ t} \qquad (1.4b.14)$$

$$k\ (t) = -\ 9/10\ e^{-9\ t} + 93\ 9/10\ e^{1/9\ t} \qquad (1.4b.15)$$

In de uitgangssituatie beantwoordt de verhouding tussen $l\ (t_o)$ en $k\ (t_o)$ niet aan de ideale situatie, welke voor een evenwichtige groei nodig is. Na korte tijd echter zal l (t) : k (t) naderen tot 109 11/20 : 93 9/10 = 7 : 6, zodat er een stabiel dynamisch evenwicht ontstaat (zie ook cijfervoorbeeld 5).

Cijfervoorbeeld 7

Gegeven : $\alpha_c = 3$ $\alpha_i = 1$ $l\ (t_o) = 210$

$\kappa_c = 5/4$ $\kappa_i = 1$ $k\ (t_o) = 100$

Gevraagd : l (t) en k (t) bij de overgang van eerste naar tweede regime.

Oplossing : $$l\ (t) = 5/3\ e^{2\ t} + 208\ 1/3\ e^{2/7\ t} \qquad (1.4b.14)$$

$$k\ (t) = -\ 25/6\ e^{2\ t} + 104\ 1/6\ e^{2/7\ t} \qquad (1.4b.15)$$

Overgang als $\frac{l\ (t)}{k\ (t)} = \frac{\alpha_c}{\kappa_c} = \frac{3}{5/4}$ d.i. als er ongeveer 3/4 periode verlopen is. Dan geldt $l\ (t = 3/4) = \pm\ 264$

$$k\ (t = 3/4) = \pm\ 110.$$

Voor het evenwicht van Leontief moet gelden:
$\frac{l\ (t)}{k\ (t)} = 2$. Daarom kan de eenzijdige toename van kapitaal voortduren totdat $k\ (t) = 132$. Met de andere randvoorwaarde $(\frac{l\ (t)}{k\ (t)} < \frac{\alpha_i}{\kappa_i})$ komt de ontwikkeling, indien deze de groeilijn van Leontief passeert, in strijd als $k\ (t) > 264$.

c) De analyse van Dorfman-Samuelson-Solow[1)]

Kritiek op de behandelde dynamische modellen.

In het systeem van Leontief wordt de eis gesteld, dat arbeid en kapitaal volledig ingeschakeld moeten zijn in het produktieproces en bovendien dat deze produktiefactoren evenwichtig moeten toenemen. Het gevolg hiervan is dat in elke periode de maximale produktie kan worden bepaald.
Ook in het model van Georgescu-Roegen worden stringente eisen gesteld, ten aanzien van de netto produktie en het onderhoud. Indien de hoeveelheden arbeid en kapitaal in periode t bekend zijn, is voor deze en de volgende perioden de produktie te berekenen. De ontwikkeling kan onder omstandigheden automatisch tenderen naar de evenwichtige groei à la Leontief, maar dit behoeft niet het geval te zijn. Er kunnen telkens andere verwikkelingen optreden.
Beide dynamische modellen zijn dus voor heden en toekomst volledig bepaald. Terecht wordt opgemerkt: ..... "this cannot really be done. No matter how rigid we make our assumptions about fixed coefficients of production or fixed capital-output ratios the introduction of a time dimension and stocks of capital inevitably

1) R. Dorfman, P. Samuelson, R. Solow: Linear Programming and Economic Analyses, New York 1958, p. 335 - 345.

"unlocks" the model ..... Commodities desired later can be produced now and stored, or resources can instead be devoted to investment in facilities for subsequent production of the commodity. Redundant capital can be held idle, or output proportions can be adjusted so that no capital is redundant. Output proportions must in any case be decided by some rule"[1].
Het algemene dynamische model moet dus bij de produktie van eindprodukten een keuze mogelijk maken. In de stelsels, welke tot dusver besproken zijn is echter van een keuze geen sprake. Voor iedere periode ligt de produktie van c- en i-goederen objectief vast. Dit komt vanwege de eis die zeker in de beginperiode wordt gesteld, dat alle arbeiders een plaats moeten vinden in het produktieproces, en alle kapitaaleenheden ingeschakeld moeten zijn.
Deze veronderstelling heeft twee gevolgen:

1) De beginvoorraden van kapitaal en arbeid moeten aan bepaalde uit de technische coëfficiënten voortvloeiende eisen voldoen. In het model van Leontief was deze eis van de beginverhouding van arbeid en kapitaal zeer streng geformuleerd. Bij Georgescu-Roegen werd daarentegen slechts volledige inschakeling als voorwaarde gesteld.
2) Tijdens de groei was de ontwikkeling van arbeid en kapitaal objectief gegeven. Wenste men bijvoorbeeld een verhouding van l en k welke van deze objectief bepaalbare verhouding afweek, dan kon aan deze wens niet worden voldaan. Het was dus onmogelijk een doel aan de groei te stellen, dat buiten de gegeven ontwikkeling lag. Men heeft zo te doen met een denkconstructie, die een soort van historisch determinisme tracht te verklaren.

Zowel voor het begin als voor het einde van het groeiproces zijn in deze modellen te stringente voorwaarden gesteld. Dit leidt vooral in het tweede model, als $\alpha_c \kappa_i > \alpha_i \kappa_c$, tot een ingewikkelde structuur, welke zelfs een tijdelijke verspilling van produktiefactoren tot gevolg heeft. Het was een schoksgewijs proces hetwelk rond de lijn van de evenwichtige groei van Leontief slingerde. Degene, die dit onaanvaardbaar acht, zal een andere gedachtengang volgen.

---

1) R. Dorfman, P. Samuelson, R. Solow: Linear Programming and Economic Analyses, New York 1958, pag. 266.

Een breder model: de eis van volledige inschakeling vervalt

Om deze redenen is nu door de genoemde auteurs een breder schema ontwikkeld, waarin per periode nog een keuze uit verschillende produktiemogelijkheden open staat. Uitgegaan wordt wederom van het statische model, dat in par. 3 werd gebezigd:

$$\mu_{cc}\ c + \mu_{ci}\ i + c_{netto} = c \qquad \text{(zie 1.3.1)}$$

$$\mu_{ic}\ c + \mu_{ii}\ i + i_{netto} = i \qquad \text{(zie 1.3.2)}$$

$$\bar{\alpha}_c\ c + \bar{\alpha}_i\ i \leqslant \bar{l} \qquad \text{(zie 1.3.3)}$$

$$\bar{\kappa}_c\ c + \bar{\kappa}_i\ i \leqslant \bar{k} \qquad \text{(zie 1.3.4)}$$

Dit model is nogmaals weergegeven in grafiek 14, waarin M_1 en M_2 de beperkingen weergeven welke de materiaalquoten aan het produktiesysteem opleggen, als men stelt dat de verbruikte produktie-eenheden vervangen moeten worden, A B en C D zijn de transformatielijnen van kapitaal en arbeid. Met behulp daarvan wordt de efficiente produktielijn F E G bepaald (pag. 82).

In de stelsels, welke in het voorafgaande besproken zijn, is als beginsituatie alleen het punt E van belang, omdat in dit punt de transformatielijnen van arbeid en kapitaal elkaar snijden. Ook de andere punten van F E G kunnen echter uitgangspunt van een ontwikkeling zijn.

Hanteert men daarbij het volgende dynamische model:

$$\mu_{cc}\ c\ (t) + \mu_{ci}\ i\ (t) + c_{netto}\ (t) = c\ (t) \qquad (1.4c.1)$$

$$\mu_{ic}\ c\ (t) + \mu_{ii}\ i\ (t) + i_{netto}\ (t) = i\ (t) \qquad (1.4c.2)$$

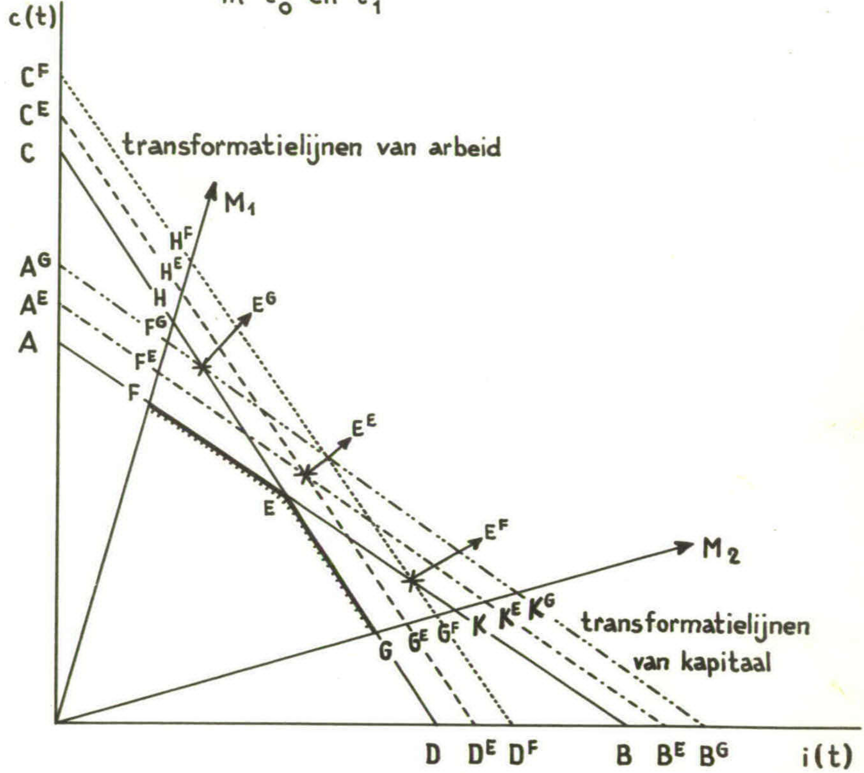
$$\bar{\alpha}_c\ c\ (t) + \bar{\alpha}_i\ i\ (t) = l\ (t) \leqslant \bar{l}\ (t) \qquad (1.4c.3)$$

$$\bar{\kappa}_c\ c\ (t) + \bar{\kappa}_i\ i\ (t) = k\ (t) \leqslant \bar{k}\ (t) \qquad (1.4c.4)$$

$$\Delta\ l\ (t) = c_{netto}\ (t) \qquad (1.4c.5)$$

$$\Delta\ k\ (t) = i_{netto}\ (t) \qquad (1.4c.6)$$

Grafiek 14. Transformatielijnen van arbeid en kapitaal in t_0 en t_1



In de vorige schema's werd geeist dat de beschikbare hoeveelheid arbeid en kapitaal in t_0 volledig in het produktieproces ingeschakeld moet zijn: zie (1.4a.3), (1.4a.4) en (1.4b.3), (1.4b.4). Zoals uit (1.4c.3) en (1.4c.4) blijkt is deze eis nu vervallen. Dit houdt in, dat in de beginperiode niet alleen het punt E van grafiek 14 maar alle punten van de lijn F E G voldoen aan de eisen van het model en dat derhalve ook elk punt van deze lijn basis voor verdere ontwikkeling kan zijn.

In F bijvoorbeeld wordt een bepaalde hoeveelheid consumptiegoederen voortgebracht, welke gedeeltelijk bestemd is voor het levensonderhoud van de te werk gestelde arbeiders en welke voor het overige uit netto consumptiegoederen, d.i. vergroting van het

arbeidspotentieel, bestaat. Tevens worden er zoveel investeringsgoederen voortgebracht als voor de vervanging van de verbruikte kapitaaleenheden nodig zijn. Door de produktie in F is in t_1 meer arbeid en evenveel kapitaal beschikbaar als in t_0. Deze hoeveelheden arbeid en kapitaal kunnen in t_1 in het produktieproces worden ingeschakeld. Grafisch kan men dit weergeven met de transformatielijn van arbeid $C^F D^F$ (de hoeveelheid arbeid is groter, dus de lijn verschuift naar rechts) en die van kapitaal AB (hoeveelheid kapitaal is gelijk). Uitgaande van de produktie F in t_0 wordt in t_1 de efficiente produktielijn dus $FE^F G^F$. Hetzelfde geldt voor de uitgangspunten E en G, ($F^E E^E G^E$ resp. $F^G E^G G$), zodat nu in t_1 drie verschillende gebroken lijnen kunnen ontstaan. Dit aantal kan echter willekeurig worden uitgebreid, omdat men van elk punt op F E G kan uitgaan.
Weliswaar geeft elk punt van elke gebroken lijn een mogelijke produktie in t_1 aan, maar alleen die produktie is efficient te noemen, welke het hoogste aantal c en i-goederen tot gevolg heeft. Heeft bijvoorbeeld een punt van de efficiente produktielijn $FE^F G^F$ de coördinaten (i, c) en een overeenkomstig punt van $F^G E^G G$ (i + a, c + b), dan zal alleen de voortbrenging volgens de tweede weg geschieden. Men zal m.a.w. voor een zo hoog mogelijke c-produktie uitgaan van G en niet van F (F^G t.o.v. F).

Heeft men nu van elk van de punten op de huidige lijn F E G de efficiente produktielijn van morgen berekend, dan zal een "verbinding tussen de laatstgenoemde uiterste produktiepunten" een weergave zijn van de bereikbare produktie in t_1. Uitgaande van deze "verbinding tussen de uiterste produktiepunten" in t_1 kan op dezelfde manier voor t_2 een lijn berekend worden. Zo kan men doorgaan. Stelt men nu een bepaalde hoeveelheid c en i als uiteindelijk doel van de ontwikkeling, dan kan berekend worden, welke weg in de kortste tijd tot dit doel voert. Deze kortste weg is te bepalen, als bekend is, op welke verbinding tussen de uiterste produktiepunten dit punt ligt. Dan is na te gaan hoe de produktie van dit punt op die lijn bereikt kan worden.

Het opbouwen van de "block triangular"-systemen, welke voor de oplossing van dit lineaire programmeringssysteem nodig zijn, zou hier te ver voeren, maar toch zijn de resultaten van de desbetreffende analyse ook nu reeds inzichtelijk.
Vooreerst is duidelijk, dat door deze opzet van het model de keu-

ze van de uiteindelijk gewenste hoeveelheid consumptie- en investeringsgoederen mogelijk is. Verder kan de weg worden bepaald welke er toe leidt dat zo snel mogelijk aan deze wens wordt voldaan.

Evenwichtige groei

Een van de wegen om het doel te bereiken loopt langs de lijn van de evenwichtige groei van Leontief. Deze lijn is echter slechts de meest efficiente, indien in de beginperiode de produktiefactoren in de voor de evenwichtige groei vereiste verhouding aanwezig zijn én de uiteindelijke vraag naar eindprodukten een punt van deze lijn is.
Voor de andere produktiewegen geldt: "If we are optimizing over a sufficiently long run, all efficient paths of capital-accumulation have the following property: They first transform the initial capital structure into one approaching the maximal steady-growth proportions; they then spend a long time performing approximate maximal steady growth; and then at the end of the period they bend away and grow into the desired terminal proportion"[1].

Enkele moeilijkheden

Bij de bepaling van de efficiente paden doen zich nog verschillende moeilijkheden voor, welke met de volgende factoren samenhangen:

1) de lengte van de produktieperiode. Indien men stelt dat het produktieproces een bepaalde tijd nodig heeft om goederen voort te brengen, en dat men verder bij een gegeven hoeveelheid arbeid en kapitaal een meer evenwichtige verhouding van deze twee produktiefactoren nastreeft, dan is dit doel soms niet te realiseren. In één proces wordt immers een vaste hoeveelheid c en i voortgebracht. Het is niet mogelijk de produktietijd te verkorten en minder goederen voort te brengen. Het resultaat kan dus zijn dat men het doel voorbijschiet. Was bijvoorbeeld eerst kapitaal relatief overvloedig en wil men, door meer consumptiegoederen te produceren, de toename van ar-

1) Dorfman c.s., pag. 344.

beid bevorderen, dan kan na de produktie blijken, dat arbeid relatief overvloedig is.

2) de onderhoudseisen. Door het opnemen van de materiaal- en factorquoten in het model, zijn zekere beperkingen aan de verhouding van de produktiefactoren gesteld. In het model zoals dit nu is opgenomen, wordt slechts geeist, dat die produktie-eenheden voor onderhoud in aanmerking komen, die in het produktieproces ingeschakeld zijn. Als bijvoorbeeld het aantal arbeidseenheden te groot is (zie F in grafiek 14), zal een gedeelte geen levensmiddelenpakket ontvangen, tenzij door netto c-produktie in hun onderhoud kan worden voorzien.

3) de verhouding van de gecumuleerde factorquoten. In de vorige onderdelen van deze paragraaf is aangetoond, dat het verschil uitmaakt of de produktie van consumptiegoederen, resp. i-goederen arbeidsintensief dan wel kapitaalintensief is. Is de consumptiegoederenindustrie arbeidsextensief, dan zal bijvoorbeeld bij relatieve kapitaalovervloed de stabiele ontwikkelingslijn van Georgescu-Roegen een weg zijn, waarlangs men tot de ideale verhouding van de produktiefactoren kan komen.

4) de verschillende randvoorwaarden. De in de vorige paragrafen ontwikkelde voorwaarden blijven ook hier gelden. Is bijvoorbeeld aan de eis t.o.v. de materiaalquoten niet voldaan, zodat meer dan de volledige produktie voor vervanging nodig is, dan zal het onmogelijk zijn een hogere produktie te bereiken. Het doel, dat in het dynamische model gesteld wordt, moet natuurlijk technisch-economisch realiseerbaar zijn.

Cijfervoorbeeld 8

Gegeven : $\bar{\alpha}_c = 3/5 \quad \bar{\alpha}_i = 7/20 \quad O_{cc} = 1 \quad O_{ci} = 1 \quad l\ (t_o) = 2142$

$\bar{\kappa}_c = 3/5 \quad \bar{\kappa}_i = 1/5 \quad V_{ic} = 1 \quad V_{ii} = 1 \quad k\ (t_o) = 1800$

Gevraagd: de efficiente produktielijnen van F, E, G in t_1 en de meest efficiente produktie.

Oplossing: $\alpha_c = 69/11 \quad \alpha_i = 35/11$

$\kappa_c = 60/11 \quad \kappa_i = 29/11$ (zie cijfervoorbeeld 5)

In t = 0 geldt[1]:

I Produktie in F:

$c\ (t_o) = 2400 \quad c_{netto}\ (t_o) = 330 \quad c_{verv.}\ (t_o) = 2070$

$i\ (t_o) = i_{verv.}\ (t_o) = 1800$

II Produktie in G:

$c\ (t_o) = c_{verv.}\ (t_o) = 2142$

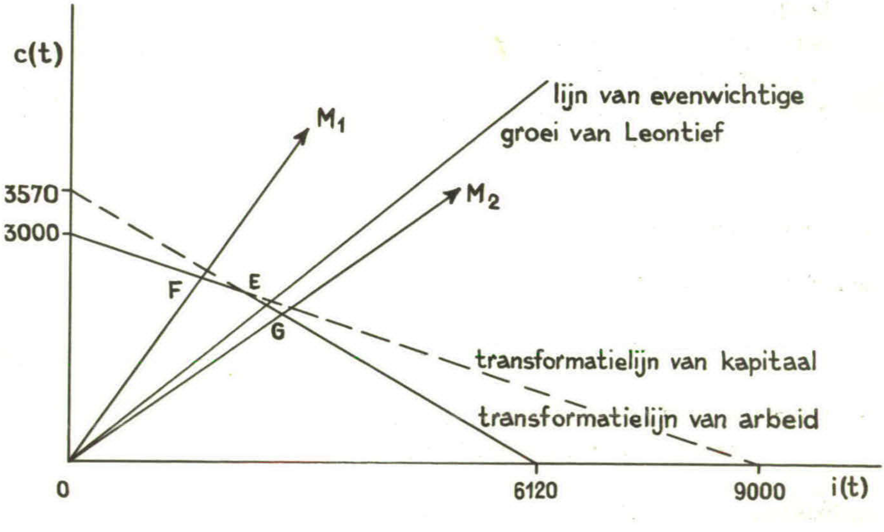
$i\ (t_o) = 2448 \quad i_{netto}\ (t_o) = 673{,}2 \quad i_{verv.}\ (t_o) = 1774{,}8$

III Produktie in E:

$c\ (t_o) = 2240 \quad c_{netto}\ (t_o) = 98 \quad c_{verv.}\ (t_o) = 2142$

$i\ (t_o) = 2280 \quad i_{netto}\ (t_o) = 480 \quad i_{verv.}\ (t_o) = 1800$

<u>Grafiek 15.</u> Cijfervoorbeeld 8.



1) I = maximale c-produktie; II = maximale i-produktie; III = volledige inschakeling van l en k.

Met behulp van de produktie in t_o zijn in t_1 nieuwe produktiefactoren aanwezig. Daar $O_{cc} = O_{ci} = 1$, c_{netto} (t) = Δ l (t),
$V_{ic} = V_{ii} = 1$ en i_{netto} (t) = Δ k (t), geldt

$l\ (t_1) = c\ (t_o)$

$k\ (t_1) = i\ (t_o)$

In verband met de randvoorwaarden ($\frac{69}{60} \leqslant \frac{l\ (t)}{k\ (t)} \leqslant \frac{35}{29}$) kan arbeid c.q. kapitaal in t_1 overvloedig zijn.
De produktie in t_1 wordt:

Produktie in t_o	Produktiefactoren in t_1			Produktie in t_1	
	Beschikbaar	Overvloed	Ingeschakeld	c	i
punt F: c = 2400	l = 2400	228[1]	2172	F 2400	1800
i = 1800	k = 1800	-	1800	K 2172	2482
(zie I)					
punt G: c = 2142	l = 2142	-	2142	H 2482	1862
i = 2448	k = 2448	586[1]	1862	G 2142	2448
(zie II)					
punt E: c = 2240	l = 2240	-	2240	H^E 2596	1947
i = 2280	k = 2280	333[1]	1947	G^E 2240	2560
(zie III)					

1) De transformatielijnen van arbeid en kapitaal snijden elkaar niet tussen M_1 en M_2, dus FK, GH resp. G^E H^E uit grafiek 14 worden relevant.

Uit de berekening blijkt dat in t_1 het produktieproces van punt E efficienter is dan dat van de punten F en G. Toch is dit nog niet het meest efficiente. Nog efficienter is nl. als men in t_o een combinatie kiest van E en G zodanig, dat geldt $l\ (t_o) = 2100$ en $k\ (t_o) = 1800$ (op de lijn van de evenwichtige groei van Leontief). In t_1 wordt dan $l\ (t_1) = 2333\ 1/3$ en $k\ (t_1) = 2000$, waardoor dus meer arbeid en kapitaal ingeschakeld zijn dan in de drie beschreven processen, zodat de produktie in t_1 ook hoger zal zijn.

d) Een model met autonome bevolkingsgroei

In het eerste gedeelte van deze paragraaf (par. 4a) werd een volledig dynamisch model ontwikkeld op basis van de veronderstellingen van Leontief. De daar ontwikkelde conclusie was, dat de groeifactor en het rendement van kapitaal onder de gegeven veronderstellingen aan elkaar gelijk zijn en dat beide volledig bepaald worden door de technische coëfficiënten.
De in dat model gemaakte hypotheses over de bevolkingsgroei en de spaarneiging zijn echter, zoals daar reeds werd vermeld, niet erg realistisch. Verondersteld werd nl., dat de bevolkingsgroei een functie is van de voortgebrachte netto consumptiegoederen en dat de meerwaarde volledig werd gespaard en geinvesteerd. Uiteraard zijn t.a.v. deze grootheden andere hypotheses mogelijk. In het kader van deze studie, waarin m.n. de invloed van het technisch kunnen op macro-economische grootheden wordt aangegeven, is een volledige behandeling van de bevolkings- en spaartheorie echter niet mogelijk. Een korte formulering van een meer realistisch model is evenwel op zijn plaats[1].

Indien men aanneemt, dat de bevolkingsgroei autonoom verloopt en dat de nieuw geproduceerde kapitaalgoederen in de volgende periode als produktiefactor worden ingeschakeld, verkrijgt men het volgende gereduceerde model van de volume-grootheden (zie (1.4a.7) t/m (1.4a.10):

$$\alpha_c \, c_{netto} (t) + \alpha_i \, i_{netto} (t) = \bar{l} (t) \qquad (1.4d.1)$$

$$\kappa_c \, c_{netto} (t) + \kappa_i \, i_{netto} (t) = \bar{k} (t) \qquad (1.4d.2)$$

$$\frac{\Delta \, l (t)}{l (t)} = \rho - 1 \qquad (1.4d.3)$$

$$i_{netto} (t) = \Delta \, k (t) \qquad (1.4d.4)$$

1) Zie o.a. F. de Roos en D.B.J. Schouten, Groeitheorie, hoofdstuk III.

Uit deze vergelijkingen volgt (zie (1.3.16) en (1.3.17)):

$$c_{netto} = \frac{\kappa_i \, \bar{l}\,(t) - \alpha_i \, \bar{k}\,(t)}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \tag{1.4d.5}$$

$$\Delta\, k\,(t) = \frac{-\kappa_c \, \bar{l}\,(t) + \alpha_c \, \bar{k}\,(t)}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c} \tag{1.4d.6}$$

Indien de ontwikkeling evenwichtig is, moet

$\dfrac{\Delta\, l\,(t)}{l\,(t)}$ gelijk zijn aan $\dfrac{\Delta\, k\,(t)}{k\,(t)}$ d.w.z.

$$(\rho - 1) = \frac{\Delta\, k\,(t)}{\bar{k}\,(t)} = \frac{-\kappa_c \dfrac{\bar{l}\,(t)}{\bar{k}\,(t)} + \alpha_c}{\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c}$$

$$\frac{\bar{l}\,(t)}{\bar{k}\,(t)} = \frac{-(\rho - 1)\,(\alpha_c \, \kappa_i - \alpha_i \, \kappa_c) + \alpha_c}{\kappa_c} \;\; 1) \tag{1.4d.7}$$

De ideale verhouding van de produktiefactoren wordt dus in dit model door de produktiequoten en de relatieve toename van de beroepsbevolking bepaald.
Als de arbeiders hun gehele inkomen en de kapitaaleigenaren een gedeelte ervan consumptief besteden, wordt het spaarbedrag van de volkshuishouding per periode gelijk aan:
$(1 - \gamma_R)\, \bar{k}\,(t)\, p_R$ [2].

Veronderstellende, dat de wet van Say actueel is, geldt:

1) Zie cijfervoorbeeld 5 met $\rho - 1 = 1/9$.

2) γ_R = consumptiequote van de kapitaaleigenaren.

$$(1 - \gamma_R)\ \bar{k}\ (t)\ p_R = i_{netto}\ (t)\ p_i \qquad (1.4d.8)$$

$$(1 - \gamma_R) \frac{p_R}{p_i} = \frac{\Delta\ k\ (t)}{\bar{k}\ (t)} \qquad \text{(zie (1.4a.24))}$$

$$(1 - \gamma_R)\ (r - 1) = \frac{\Delta\ k\ (t)}{\bar{k}\ (t)} = \frac{\Delta\ \bar{l}\ (t)}{\bar{l}\ (t)} = \rho - 1 \qquad (1.4d.9)$$

De groei van het arbeidspotentieel en die van de kapitaalgoederenvoorraad zijn gelijk. De ontwikkeling is evenwichtig en door de groeifactor en de gegeven spaarquote wordt het rendement bepaald.

Natuurlijk kan in de beginperiode de verhouding van arbeid en kapitaal afwijken van de ideale verhouding, zoals deze in (1.4d.7) is weergegeven. Als de voorraad kapitaalgoederen relatief kleiner is dan in de evenwichtige situatie vereist wordt, kan de relatieve ontwikkeling van kapitaal aldus worden berekend:

$$\frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} > \frac{\alpha_c - (\rho - 1)\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}{\kappa_c}$$

Geeft men verschil tussen de ideale en werkelijke verhouding aan met $\frac{A}{\kappa_c}$ dan is

$$\frac{\bar{l}\ (t_o)}{\bar{k}\ (t_o)} = \frac{\alpha_c - (\rho - 1)\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c) + A}{\kappa_c}$$

Uit (1.4d.5) volgt:

$$\frac{\Delta\ k\ (t)}{\bar{k}\ (t)} = \frac{(\rho - 1)\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c) - A}{\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c} = \frac{\Delta\ l\ (t)}{\bar{l}\ (t)} + \frac{-A}{\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c}$$

$$(1.4d.10)$$

Afhankelijk van de verhouding van de factorquoten doen zich hier twee gevallen voor (zie par. 4b):

1) als $\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c < 0$ ontstaat een stabiel evenwicht, omdat de relatieve groei van kapitaal sterker is dan die van arbeid, zodat de relatieve achterstand van kapitaal wordt ingelopen (zie grafiek 11). De verhouding van l (t) en k (t) zal tot de ideale verhouding naderen, mede omdat A hoe langer hoe kleiner wordt. $\frac{A}{\kappa_c}$ is nl. per definitie gelijk aan het verschil tussen de werkelijke em de ideale verhouding van de produktiefactoren.
2) als $\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c > 0$ is het evenwicht onstabiel en wordt de achterstand van kapitaal groter (zie grafiek 12).

Volgens het model worden de volumegrootheden dus uitsluitend door (1.4d.1) t/m (1.4d.4) bepaald. Uitgaande van een bepaalde hoeveelheid van de produktiefactoren en van een volledige inschakeling hiervan via het prijsmechanisme, ligt de verhouding tussen Δ k (t) en $\bar{k}$ (t) vast. Bovendien volgt uit (1.4d.8) dat:

$$(1 - \gamma_R)\,(r - 1) = \frac{\Delta\, k\ (t)}{\bar{k}\ (t)} \tag{1.4d.11}$$

Bij een evenwichtige ontwikkeling wordt uiteindelijk door de, uit de vergelijkingen van de volume-grootheden bepaalde, relatieve toename van de produktiefactoren (Δ k (t) : $\bar{k}$ (t) = Δ l (t) : $\bar{l}$ (t) = ρ - 1) en de gegeven consumptiequote van de kapitaaleigenaren het netto kapitaalrendement bepaald.
Bij een onevenwichtige ontwikkeling zal, bij een relatieve kapitaalschaarste in de uitgangssituatie, de achterstand van kapitaal groter worden en bij overvloed van kapitaal de voorsprong toenemen. Deze ontwikkeling van de volume-grootheden wordt door de ontwikkeling van het rendement van kapitaal niet beinvloed.

H O O F D S T U K   II

S U B S T I T U T I E : M E E R D E R E F A C T O R Q U O T E N P E R P R O D U K T

1. Inleiding

In het vorige hoofdstuk zijn, uitgaande van volkomen complementariteit van de produktiefactoren, de theorieën van verschillende auteurs aan een nadere analyse onderworpen. Met name werd nagegaan, hoe de grootte van de factorquoten in het model bepaalde conclusies met betrekking tot de produktie, de prijzen en de economische groei impliceerde.
In dit hoofdstuk zal een ander uitgangspunt worden gekozen. Nu zal niet van complementariteit van produktiefactoren (één technische mogelijkheid per produkt), maar van substitueerbaarheid van kapitaal en arbeid worden uitgegaan. Afziende van volkómen substitueerbaarheid van de produktiefactoren en van een oneindig aantal technieken per goederensoort, wordt gesteld, dat per goederensoort en binnen bepaalde grenzen twee produktietechnieken, nl. een kapitaalintensieve en een arbeidsintensieve, mogelijk zijn. De definitie van deze substitueerbaarheid luidt: "de produktiefactoren arbeid en kapitaal kunnen binnen bepaalde grenzen, aangegeven door de isoclinen, door elkaar vervangen worden, zonder dat hierdoor het produktieresultaat verandert"[1].
Niet in elk geval is substitutie, ook al is deze technisch mogelijk, verantwoord. Als bijvoorbeeld een bepaald produkt kan worden vervaardigd met 4 arbeidseenheden en 3 kapitaaleenheden dan wel met 4 arbeidseenheden en 5 kapitaaleenheden, zijn er alleen technisch gezien twee technieken. Wil de substitutie economisch verantwoord zijn, dan wordt vooreerst geëist, dat de beide mogelijkheden efficient zijn, d.w.z. dat de ene arbeidsintensief (d.i.

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, pag. 179.

kapitaalextensief) en de andere arbeidsextensief (d.i. kapitaalintensief) is, zodat in het eerste geval relatief meer arbeid en in het tweede geval relatief meer kapitaal nodig is, en vervolgens dat beide produktiemethoden dezelfde totale kosten per eenheid produkt veroorzaken, d.w.z. dat de isokostenlijn en de basis-isoquant eenzelfde hellingshoek hebben[1].

Voor het model waarin substitutie opgenomen is, worden de volgende symbolen gebruikt:

μ, α, κ, c, i, l en k: als in het voorafgaande.

c_1 en c_2 : consumptiegoed, geproduceerd volgens de eerste, de kapitaalintensieve c.q. de tweede, de arbeidsintensieve techniek. c_1 en c_2 zijn dus hetzelfde produkt, maar de produktietechniek is verschillend.

i_1 en i_2 : investeringsgoed, geproduceerd volgens eerste c.q. tweede techniek.

Zo wordt dus bijvoorbeeld:

$\mu_{c_1 c_2}$: hoeveelheid materiaal, geleverd door de c_1-industrie aan de c_2-industrie, per eenheid c_2,

$\bar{\alpha}_{c_1}$: directe arbeidsquote van de kapitaalintensieve techniek per eenheid c.

1) De begrippen isoquant, isocline en isokostenlijn worden ook in de bedrijfseconomische literatuur gehanteerd. Daar betekent bijv. een meer kapitaalintensieve techniek, dat men een duurdere machine, met dezelfde gelijktijdige en volgtijdige capaciteit, met minder directe arbeidskrachten bemant of een veel duurdere machine met dezelfde volgtijdige maar een hogere gelijktijdige capaciteit met dezelfde hoeveelheid directe arbeidskrachten.
De substitutie van produktiefactoren binnen een bedrijfshuishouding wordt bemoeilijkt ten gevolge van het feit, dat vooral de meer kapitaalintensieve technieken niet volkomen deelbaar zijn. Algemeen economisch gezien is de beperkte deelbaarheid van kapitaalgoederen een minder in het oog lopend verschijnsel. Men dient dan de substitutie van produktiefactoren meer te zien als een, binnen een bedrijfstak verlopende, relatieve expansie resp. inkrimping van bedrijven die relatief meer kapitaalintensieve resp. meer arbeidsintensieve technieken toepassen (d.i. vervanging van arbeid door kapitaal). Gezien het hoger produktievolume van een bedrijfstak vergeleken met dat van een bedrijfshuishouding, speelt hierbij de ondeelbaarheid van bepaalde produktiemethoden een veel geringer rol. Overigens zij de aandacht er nogmaals op gevestigd, dat de kwestie van een verschil in volgtijdige capaciteit (= levensduur) der kapitaalgoederen hier buiten beschouwing blijft.

Enkele theorieën welke substitueerbaarheid van de produktiefactoren tot grondslag hebben, worden in de volgende paragrafen behandeld. Voor de statische analyse wordt uitgegaan van de theorie van Schouten, voor de dynamische van de theorie van Von Neumann en van die van Malinvaud. Daarna worden de gevolgtrekkingen uit de leer over substitutie toegepast op de theorieën van Marx en Walras. Hierbij zal m.n. aandacht worden geschonken aan de randvoorwaarden, welke door de technische quoten aan de produktie en de ontwikkeling worden gesteld en aan de afleiding van de gecumuleerde quoten, de groeifactor en het evenwicht tussen kapitaal en arbeid.

2. Een statisch model

Hoofdstuk IX van "Exacte Economie"

In hoofdstuk IX ("De moderne prijs- en produktieleer") van "Exacte Economie" gaat Schouten uit van onderlinge substitueerbaarheid van de produktiefactoren arbeid en kapitaal, van twee eindprodukten (c_{netto}, i_{netto}) en van twee efficiente technieken per produkt. Met behulp van de zes produktiecombinaties
($c_{1\,netto} + c_{2\,netto}$; $c_{1\,netto} + i_{1\,netto}$; $c_{1\,netto} + i_{2\,netto}$;
$c_{2\,netto} + i_{1\,netto}$; $c_{2\,netto} + i_{2\,netto}$; $i_{1\,netto} + i_{2\,netto}$)
worden zes produktieresultaten berekend, waarbij arbeid en kapitaal per combinatie volledig in het produktieproces zijn ingeschakeld.
Uitgaande van het voorbeeld, waarbij geldt

$$\frac{\alpha_{c_2}}{\kappa_{c_2}} > \frac{\alpha_{i_2}}{\kappa_{i_2}} > \frac{\bar{\bar{l}}}{\bar{\bar{k}}} > \frac{\alpha_{c_1}}{\kappa_{c_1}} > \frac{\alpha_{i_1}}{\kappa_{i_1}} \qquad (2.2.1)$$

en

$$\frac{\alpha_{i_2} - \alpha_{i_1}}{\kappa_{i_1} - \kappa_{i_2}} < \frac{\alpha_{c_2} - \alpha_{c_1}}{\kappa_{c_1} - \kappa_{c_2}} \qquad (2.2.2)$$

komt hij o.a. tot de volgende conclusies:

Twee oplossingen zijn technisch niet uitvoerbaar ($c_{1\,netto}$ + $i_{1\,netto}$; $c_{2\,netto}$ + $i_{2\,netto}$), omdat de verhouding van arbeid en kapitaal niet gelegen is tussen die van de produktiequoten van $c_{2\,netto}$ en $i_{2\,netto}$ c.q. van $c_{1\,netto}$ en $i_{1\,netto}$, zodat volledige bezetting van de produktiefactoren in deze combinaties niet mogelijk is (zie (2.2.1) en o.a. (1.3.12) en (1.3.13)). Een oplossing is niet efficient ($c_{2\,netto}$ + $i_{1\,netto}$), omdat de marginale substitutieverhouding van arbeid t.o.v. kapitaal van de i-producent kleiner is dan die van de c-producent, met als gevolg dat de kostprijs van de $c_{2\,netto}$ of $i_{1\,netto}$ hoger is dan van $c_{1\,netto}$ of $i_{2\,netto}$[1].
Met behulp van de overige drie produktiecombinaties kan nu, in een diagram met een c_{netto}- en i_{netto}-as, de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden getekend worden (zie grafiek 16)[2]. Schakelt men nl. de volledige hoeveelheid arbeid en kapitaal in in de c-industrie, dan zal met behulp van de eerste en tweede techniek een bepaalde hoeveelheid c_{netto} geproduceerd worden (punt A); bij aanwending van de produktiefactoren in de i-industrie ontstaat een bepaalde hoeveelheid netto i-goederen (punt B), terwijl een combinatie van c_2 en i_1 zowel c_{netto} als i_{netto} oplevert (punt C). Indien de preferenties van de consumenten bekend zijn, kan het snijpunt van de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden en de bestedingsfunctie berekend worden (punt D). Bij deze produktie-omvang zijn arbeid en kapitaal volledig ingeschakeld, is de produktie zo hoog mogelijk en wordt aan de wens van de consumenten voldaan.
Uitgaande van deze produktiemogelijkheden, komt Schouten tot een prijsleer, waarbij de prijsverhouding van de eindprodukten ($p_c : p_i$) gelijk is aan de hellingshoek van het relevante stuk van de lijn van meest efficiente produktiemogelijkheden (= aan de relevante substitutieverhouding van c- en i-goed), terwijl de beloningsverhouding van arbeid (p_L) en kapitaal (p_R) bepaald wordt door de hellingshoek van de isoquant van de industrie, die twee technieken toepast. De reele beloningsvoet van kapitaal, d.i. het netto feitelijk rendement, wordt dan gedefinieerd als p_R/p_i.

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, pag. 124
2) Pag. 98.

Het model

Uitgaande van de redeneringen, welke in het voorafgaande in het kort zijn weergegeven, is door Schouten een model ontwikkeld, dat onder de in (2.2.1) en (2.2.2) gegeven veronderstellingen aldus luidt[1]:

de transformatiefunctie:

$$c_{netto} = -\left(\frac{\alpha_{i_1}}{\hat{\alpha}_c} + \frac{\kappa_{i_1}}{\hat{\kappa}_c}\right) i_{netto} + \frac{1}{\hat{\alpha}_c}\,\bar{l} + \frac{1}{\hat{\kappa}_c}\,\bar{k} \qquad (2.2.3)$$

de bestedingsfunctie:

$$c_{netto} = \frac{\gamma}{1-\gamma}\, i_{netto}\, \frac{p_i}{p_c} \qquad (2.2.4)$$

de prijsvormingsfuncties:

$$p_c = \alpha_{c_1}\, p_L + \kappa_{c_1}\, p_R = \hat{\alpha}_c\, p_L = \hat{\kappa}_c\, p_R \qquad (2.2.5)$$

$$p_c = \alpha_{c_2}\, p_L + \kappa_{c_2}\, p_R = \hat{\alpha}_c\, p_L = \hat{\kappa}_c\, p_R \qquad (2.2.6)$$

$$p_i = \alpha_{i_1}\, p_L + \kappa_{i_1}\, p_R \qquad (2.2.7)$$

de quantiteitsfunctie:

$$p_L = \text{gegeven} \qquad (2.2.8)$$

Indien de produktiequoten, de consumptiequote (γ) en de hoeveelheden $\bar{l}$ en $\bar{k}$ gegeven zijn, zijn de zes economische variabelen (c_{netto}, i_{netto}, p_c, p_i, p_L, p_R) te berekenen.
Hierbij is:

1) Het model geldt alleen voor het lijnstuk AC (grafiek 16); voor CB is een analoog model op te stellen.

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_c} = \frac{\kappa_{c_1} - \kappa_{c_2}}{\alpha_{c_2}\kappa_{c_1} - \alpha_{c_1}\kappa_{c_2}} \qquad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{\hat{\kappa}_c} = \frac{\alpha_{c_2} - \alpha_{c_1}}{\alpha_{c_2}\kappa_{c_1} - \alpha_{c_1}\kappa_{c_2}} \qquad (2.2.10)$$

In (2.2.9) wordt het grensprodukt van arbeid van de c-producent, in (2.2.10) het grensprodukt van kapitaal van de c-producent gedefinieerd[1].

Cijfervoorbeeld 9

Gegeven : $\alpha_{c_1} = 3/7 \quad \alpha_{c_2} = 1 \quad \alpha_{i_1} = 1/2 \quad \alpha_{i_2} = 150/101$

$\kappa_{c_1} = 15/14 \quad \kappa_{c_2} = 1/2 \quad \kappa_{i_1} = 1 \quad \kappa_{i_2} = 75/101$

$\bar{l} = 1400 \quad \bar{k} = 1900 \quad p_L = 7$

Consumptiefunctie: $c_{netto} = i_{netto}$

Gevraagd : p_c, p_i, p_L, p_R, c_{netto} en i_{netto}

Oplossing :

$\frac{\alpha_{c_2} - \alpha_{c_1}}{\kappa_{c_1} - \kappa_{c_2}} < \frac{\alpha_{i_2} - \alpha_{i_1}}{\kappa_{i_1} - \kappa_{i_2}}$ $(1 < \frac{199}{52})$: de produktie-combinatie

$c_{1\,netto} + i_{2\,netto}$ is niet efficient.

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, p. 134.

$$\frac{\alpha_{c_1}}{\kappa_{c_1}} < \frac{\alpha_{i_1}}{\kappa_{i_1}} < \frac{\bar{1}}{\bar{k}} \quad (\frac{6}{15} < \frac{1}{2} < \frac{14}{19})$$

$$\frac{\alpha_{c_2}}{\kappa_{c_2}} = \frac{\alpha_{i_2}}{\kappa_{i_2}} > \frac{\bar{1}}{\bar{k}} \quad (2 = 2 > \frac{14}{19})$$

de combinaties $c_{1\,netto}$ + $i_{1\,netto}$ en $c_{2\,netto}$ + $i_{2\,netto}$ zijn technisch niet uitvoerbaar als de produktiefactoren volledig ingeschakeld moeten zijn.

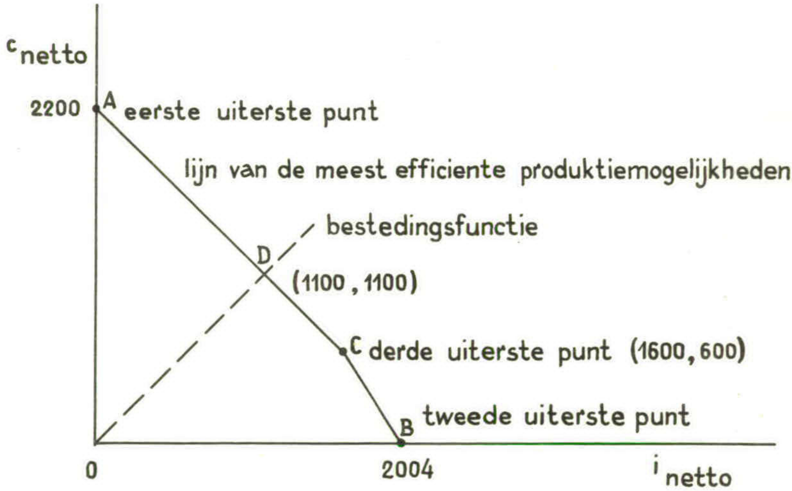
De uiterste punten zijn:

punt A: $c_{1\,netto}\ (1400) + c_{2\,netto}\ (800) = c_{netto} = 2200$

punt B: $i_{1\,netto}\ (1600) + i_{2\,netto}\ (404) = i_{netto} = 2004$

punt C: $c_{2\,netto} = 600,\ i_{1\,netto} = 1600.$

Grafiek 16. Cijfervoorbeeld 9.



$$c_{netto} = -\left(\frac{\alpha_{i_1}}{\hat{\alpha}_c} + \frac{\kappa_{i_1}}{\hat{\kappa}_c}\right) i_{netto} + \frac{1}{\hat{\alpha}_c}\,\bar{1} + \frac{1}{\hat{\kappa}_c}\,\bar{k} = -\,i + 2200 \quad (2.2.3)$$

$$c_{netto} = i_{netto} = 1100 \quad (2.2.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} p_c = \alpha_{c_1} p_L + \kappa_{c_1} p_R \\ p_c = \alpha_{c_2} p_L + \kappa_{c_2} p_R \\ p_i = \alpha_{i_1} p_L + \kappa_{i_1} p_R \\ p_L = 7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{ll} p_R = 7 & (2.2.5) \\ p_c = 10{,}5 & (2.2.6) \\ p_i = 10{,}5 & (2.2.7) \\ & (2.2.8) \end{array}$$

Afleiding van de gecumuleerde quoten

In het voorgaande is in het kort de theorie van Schouten weergegeven. Zijn analyse is gebaseerd op gecumuleerde arbeids- en kapitaalquoten. In het kader van deze studie is het echter nodig de directe factorquoten en materiaalquoten als basis te nemen, teneinde aldus na te gaan, hoe de gecumuleerde quoten uit de, direct per bedrijfstak te meten, technische coëfficiënten bepaald worden[1].

Uitgaande van de veronderstellingen,

dat het consumptiepakket per arbeider en de vervanging van kapitaalgoederen per kapitaaleenheid in elke industrie en bij elke produktietechniek gelijk zijn[2] (dus: $0_{c_1 c_1} = 0_{c_1 i_1} = 0_{c_1 i_2} = 0_{c_2 c_2} = 0_{c_2 i_1} = 0_{c_2 i_2}$ en $V_{i_1 c_1} = V_{i_1 c_2} = V_{i_1 i_1} = V_{i_2 c_1} = V_{i_2 c_2} = V_{i_2 i_2}$),

dat de arbeiders in de c_1- en c_2-industrie hun consumptiegoederen voor het basispakket zelf voortbrengen ($0_{c_2 c_1} = 0_{c_1 c_2} = 0$) en de vervangingsinvesteringen van de i-industrie eveneens door de eigen bedrijfstak geleverd worden ($V_{i_1 i_2} = V_{i_2 i_1} = 0$).

---

1) De volgende analyse steunt vooral op de ideeën, welke Prof. Dr. D.B.J. Schouten in een privatissimum op 30-5-1959 naar voren bracht.

2) $0_{c_1 i_2}$ = de hoeveelheid c-goederen, geproduceerd volgens de eerste techniek (c_1), welke één arbeider in de i_2-industrie nodig heeft.

dat de hoeveelheid produktiemiddelen niet mag afnemen, kunnen de volgende produktiecombinaties voorkomen: $c_1 + i_1$; $c_1 + i_2$; $c_2 + i_1$; $c_2 + i_2$.
Indien men uitgaat van directe quoten, zijn de combinaties $c_1 + c_2$ en $i_1 + i_2$ niet mogelijk, omdat dan aan de onderhouds- c.q. vervangingseisen van de produktiefactoren niet voldaan kan worden. Bij een produktie welke bijvoorbeeld alleen op consumptiegoederen gericht is $(c_1 + c_2)$ zouden de in het produktieproces verbruikte kapitaaleenheden niet vervangen kunnen worden. De produktie van vervangingsinvesteringen blijft dan immers achterwege. Stelt men dus als eis, dat de hoeveelheid produktiemiddelen niet mag afnemen, dan zijn alleen de vier genoemde produktiecombinaties relevant.
Afhankelijk van de verhouding van de marginale substitutieverhoudingen van arbeid t.o.v. kapitaal van de c- en i-producent, is of $c_1 + i_2$ of $c_2 + i_1$ niet efficient. Als bijvoorbeeld:

$$\frac{\bar{\alpha}_{c_2} - \bar{\alpha}_{c_1}}{\bar{\kappa}_{c_1} - \bar{\kappa}_{c_2}} < \frac{\bar{\alpha}_{i_2} - \bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\kappa}_{i_1} - \bar{\kappa}_{i_2}},$$ is de produktiecombinatie $c_1 + i_2$

niet verantwoord[1]. Gaat men voor de marginale substitutieverhoudingen van de produktiefactoren van deze hypothese uit, dan zijn alleen $c_1 + i_1$; $c_2 + i_1$; $c_2 + i_2$ relevant. Voor elk van deze combinaties zijn de gecumuleerde factorquoten uit de directe factorquoten en de materiaalquoten te berekenen[2]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{c_1} & \alpha'_{i_1} \\ \kappa_{c_1} & \kappa'_{i_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{c_1} & \bar{\alpha}_{i_1} \\ \bar{\kappa}_{c_1} & \bar{\kappa}_{i_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mu_{c_1 c_1} & - \mu_{c_1 i_1} \\ - \mu_{i_1 c_1} & 1 - \mu_{i_1 i_1} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (2.2.11)$$

$\langle \alpha, \kappa \rangle = \langle \bar{\alpha}, \bar{\kappa} \rangle \left[I - M \right]^{-1}$

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, pag. 124.
2) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, appendix II.

$$\begin{bmatrix} \alpha'_{c_2} & \alpha_{i_2} \\ \kappa'_{c_2} & \kappa_{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{c_2} & \bar{\alpha}_{i_2} \\ \bar{\kappa}_{c_2} & \bar{\kappa}_{i_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mu_{c_2 c_2} & - \mu_{c_2 i_2} \\ - \mu_{i_2 c_2} & 1 - \mu_{i_2 i_2} \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{c_2} & \alpha_{i_1} \\ \kappa_{c_2} & \kappa_{i_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{c_2} & \bar{\alpha}_{i_1} \\ \bar{\kappa}_{c_2} & \bar{\kappa}_{i_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mu_{c_2 c_2} & - \mu_{c_2 i_1} \\ - \mu_{i_1 c_2} & 1 - \mu_{i_1 i_1} \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.2.13}$$

Hieruit resulteren merkwaardigerwijs twee stelsels gecumuleerde factorquoten voor i_1 nl. α'_{i_1}, κ'_{i_1} uit (2.2.11) en α_{i_1}, κ_{i_1} uit (2.2.13) en twee voor c_2 nl. α'_{c_2}, κ'_{c_2} (2.2.12) en α_{c_2}, κ_{c_2} (2.2.13). De gecumuleerde factorquoten voor c_2 en i_1 zijn daarentegen eenduidig bepaald.
Als men echter de toepassing van de matrices bestudeert, komt men tot de conclusie dat α'_{i_1}, κ'_{i_1} en α'_{c_2}, κ'_{c_2} niet behoeven te worden gehanteerd. De quotenmatrix (2.2.13) nl. is de weergave van de technische structuur van het derde uiterste punt (zie grafiek 16). Dit punt is het snijpunt van de transformatielijnen van arbeid en kapitaal zoals o.a. in grafiek 8 is weergegeven. In dit punt zijn arbeid en kapitaal volledig in het produktieproces ingeschakeld, terwijl voor beide produkten slechts één produktietechniek toepassing vindt: voor c de tweede en voor i de eerste techniek. Om nu de produktie van het eerste uiterste punt van grafiek 16 te bereiken, is eveneens produktie van c_1 nodig. Hierbij moeten ook vervangingsinvesteringen geproduceerd worden. In combinatie met c_1 kan deze i-produktie alleen via de eerste techniek geschieden, omdat de combinatie $c_1 + i_2$ niet efficient is. De technische structuur van de combinatie $c_1 + i_1$ is weergegeven in de matrix (2.2.11). De daaruit afgeleide "gecumuleerde quoten" van i vinden echter bij de bepaling van het eerste uiterste punt geen toepassing, omdat daar geen "netto i" wordt voortgebracht.
Hetzelfde geldt voor de gecumuleerde c_2-quoten in matrix (2.2.12): consumptiegoederen worden in het tweede uiterste punt alleen

voortgebracht in zoverre deze voor het onderhoudspakket van de arbeiders nodig zijn. "Netto c" wordt immers niet voortgebracht, zodat de desbetreffende "gecumuleerde factorquoten" van c niet van belang zijn voor de bepaling van het tweede uiterste punt. In het model gelden dus (2.2.13) als de hoofdmatrix en de (2.2.11) en (2.2.12) als submatrices. De gecumuleerde quoten van de submatrices zijn niet bij de bepaling van de netto produktie van i_1 resp. c_2, maar alleen bij die van c_1 resp. i_2 relevant. Naarmate men bij voortbrenging meer van het eerste of van het tweede uiterste punt overgaat naar het derde uiterste punt, wordt de techniek van de hoofdmatrix relatief meer toegepast.

Voor elk van de drie uiterste punten van dit model van gedeeltelijke substitueerbaarheid gelden voor de materiaal- en factorquoten de drie voorwaarden welke in hoofdstuk I ontwikkeld zijn. In feite geven nl. de drie quotenmatrices, afzonderlijk genomen, een produktiestructuur à la Leontief weer. Door een combinatie van verschillende Leontief-structuren ontstaat het model van Schouten[1].

Cijfervoorbeeld 10

Gegeven : $\bar{\alpha}_{c_1} = 1/5 \quad \bar{\alpha}_{c_2} = 7/15 \quad \bar{\alpha}_{i_1} = 2/15 \quad \bar{\alpha}_{i_2} = 5/11$

$\bar{\kappa}_{c_1} = 2/5 \quad \bar{\kappa}_{c_2} = 2/15 \quad \bar{\kappa}_{i_1} = 7/15 \quad \bar{\kappa}_{i_2} = 5/16$

$\bar{l} = 1400 \quad \bar{k} = 1900 \quad p_L = 7 \quad 0 = 1 \quad V = 1$

$c_{netto} = i_{netto}$

Gevraagd: wordt aan de voorwaarden van Hawkins-Simon voldaan?
de gecumuleerde factorquoten,
de produktie, de prijzen en de beloningsvoeten.

1) Dit wordt door Schouten eveneens geillustreerd in hoofdstuk X van "Exacte Economie". In dat hoofdstuk leidt het model à la Leontief voor twee landen, bij vrijhandel en vrije mobiliteit van de produktiefactoren, voor de gemeenschap van deze landen tot een model als hierboven besproken.

Daar $\dfrac{\bar{\alpha}_{c_2} - \bar{\alpha}_{c_1}}{\bar{\kappa}_{c_1} - \bar{\kappa}_{c_2}} < \dfrac{\bar{\alpha}_{i_2} - \bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\kappa}_{i_1} - \bar{\kappa}_{i_2}}$ $(1 < \frac{848}{407})$, is $c_1 + i_2$ niet efficient.

1) combinatie $c_1 + i_1$:

$\mu_{c_1 c_1} = 1/5$ $\qquad$ $\mu_{c_1 i_1} = 2/15$

$\mu_{i_1 c_1} = 2/5$ $\qquad$ $\mu_{i_1 i_1} = 7/15$

condities van Hawkins-Simon:

$$\frac{1 - \mu_{i_1 i_1}}{\mu_{i_1 c_1}} > \frac{\mu_{c_1 i_1}}{1 - \mu_{c_1 c_1}} \quad \left(\frac{4}{3} > \frac{1}{6}\right)$$

gecumuleerde quoten:

$\alpha_{c_1} = 3/7$ $\qquad$ $\alpha'_{i_1} = 5/14$

$\kappa_{c_1} = 15/14$ $\qquad$ $\kappa'_{i_1} = 8/7$

2) combinatie $c_2 + i_2$:

$\mu_{c_2 c_2} = 7/15$ $\qquad$ $\mu_{c_2 i_2} = 5/11$

$\mu_{i_2 c_2} = 2/15$ $\qquad$ $\mu_{i_2 i_2} = 5/16$

condities van Hawkins-Simon:

$$\frac{1 - \mu_{i_2 i_2}}{\mu_{i_2 c_2}} > \frac{\mu_{c_2 i_2}}{1 - \mu_{c_2 c_2}} \quad \left(\frac{165}{32} > \frac{75}{88}\right)$$

gecumuleerde quoten:

$\alpha'_{c_2} = 1007/808$ $\qquad$ $\alpha_{i_2} = 150/101$

$\kappa'_{c_2} = 44/101$ $\qquad$ $\kappa_{i_2} = 75/101$

3) combinatie $c_2 + i_1$:

$\mu_{c_2 c_2} = 7/15$ $\qquad$ $\mu_{c_2 i_1} = 2/15$

$\mu_{i_1 c_2} = 2/15$ $\qquad$ $\mu_{i_1 i_1} = 7/15$

condities van Hawkins-Simon:

$$\frac{1 - \mu_{i_1 i_1}}{\mu_{i_1 c_2}} > \frac{\mu_{c_2 i_1}}{1 - \mu_{c_2 c_2}} \quad (4 > \frac{1}{4})$$

gecumuleerde quoten:

$\alpha_{c_2} = 1$ $\qquad$ $\alpha_{i_1} = 1/2$

$\kappa_{c_2} = 1/2$ $\qquad$ $\kappa_{i_1} = 1$

De gecumuleerde quoten worden dus:

$\alpha_{c_1} = 3/7 \quad \alpha_{c_2} = 1 \quad \alpha_{i_1} = 1/2 \quad \alpha_{i_2} = 150/101$

$\kappa_{c_1} = 15/14 \quad \kappa_{c_2} = 1/2 \quad \kappa_{i_1} = 1 \quad \kappa_{i_2} = 75/101$

Uit de gegevens van cijfervoorbeeld 9 blijkt:
t.a.v. de prijzen: Daar het onderhoudspakket voor alle arbeiders uit één c-goed bestaat, is de bruto loonvoet: $\bar{p}_{Lc} = \bar{p}_{Li} = p_L + p_c = 17{,}5$[1].

---

1) Als men p_c expliciet in het loon opneemt, neemt men aan dat elke arbeider één consumptiegoed als minimum nodig heeft. Het totale loon moet dan minimaal gelijk zijn aan p_c. "Het is voor de beschouwing irrelevant of men de minimum-kosten van levensonderhoud van de factor arbeid opneemt in de input van materialen dan wel of men het totale loon als variabel beschouwt met een onderste grens". (D.B.J. Schouten, boekbespreking, De Economist, 1961 p. 250).

Analoog is de bruto beloningsvoet voor kapitaal $\bar{p}_{Rc} = \bar{p}_{Ri} = p_R + p_i = 17,5$.
De prijzen van de eindprodukten zijn $p_c = p_i = 10,5$.

t.a.v. de produktie: $c_{verv.} = 0_{c_1 c_1} \bar{l} = 1 \times 1400$

$i_{verv.} = V_{i_1 i_1} \bar{k} = 1 \times 1900$

$c = c_{netto} + c_{verv.} = 1100 + 1400 = 2500$

$i = i_{netto} + i_{verv.} = 1100 + 1900 = 3000$

Tabel van middelen en bestedingen

	Volume x prijs = waarde		Volume x prijs = waarde
arbeidsloon:		c-goederen:	
voor onderhoud	1400x10,5=14700	$c_{verv.}$	1400x10,5=14700
meerwaarde	1400x7 = 9800	c_{netto}	1100x10,5=11550
kapitaalbeloning:		i-goederen:	
voor vervanging	1900x10,5=19950	$i_{verv.}$	1900x10,5=19950
meerwaarde	1900x7 =13300	i_{netto}	1100x10,5=11550
totaal middelen	57750	totaal bestedingen	57750

De produktie in het eerste uiterste punt is (zie ook cijfervoorbeeld 9):

voor de combinatie $c_1 + i_1$: $c_1 = 2000$; $i_1 = 1500$] $c = 3600$
voor de combinatie $c_2 + i_1$: $c_2 = 1600$; $i_1 = 400$] $i = 1900$

De verdeling van deze produktie is:

$c_{netto} = 2200$, $c_{verv.} = 1400$

$i_{netto} = 0$, $i_{verv.} = 1900$.

Zo blijkt dat de gecumuleerde quoten van i_1 voor de netto produktie in het eerste uiterste punt niet in aanmerking genomen behoren te worden ($i_{netto} = 0$).

In het tweede uiterste punt is de produktie:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{voor } c_2 + i_1 : & c_2 = 800 & i_1 = 3200 \\ \text{voor } c_2 + i_2 : & c_2 = 600 & i_2 = \ \ 704 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} c = 1400 \\ i = 3904 \end{array}$$

$$\text{de verdeling is: } \begin{array}{ll} c_{netto} = 0 & c_{verv.} = 1400 \\ i_{netto} = 2004 & i_{verv.} = 1900 \end{array}$$

De gecumuleerde quoten van c_2 komen bij de netto produktie in het tweede uiterste punt niet voor ($c_{netto} = 0$).

3. Het dynamische model

In het vorige hoofdstuk kwam na het statische model van Leontief het dynamische model ter sprake. In twee van de vier behandelde varianten, was het, als gevolg van de beperkte technische mogelijkheden en de eis van volledige inschakeling van de produktiefactoren, niet mogelijk aan bepaalde eisen van de consumenten te voldoen. Nu in dit hoofdstuk uitgegaan wordt van substitueerbaarheid van de produktiefactoren zou men kunnen denken, dat de preferenties van de economische subjecten wel invloed kunnen uitoefenen op het ontwikkelingsproces. In het eerste model van deze paragraaf (Von Neumann) echter wordt de ontwikkeling nog uitsluitend door de vooropgestelde eis van evenwichtige groei bepaald. In het volgende model (Malinvaud) wordt daarentegen, evenals in het derde dynamische model van hoofdstuk I (Dorfman-Samuelson-Solow), meer aandacht aan de wensen en daarmede aan andere groeimogelijkheden geschonken. In het laatste gedeelte van deze paragraaf kan, door invoering van het begrip substitutie van de produktiefactoren in de theorie van Marx en Walras, met de preferenties van de kapitaalverstrekkers expliciet rekening worden gehouden (zie hoofdstuk I, par. 4d).

a) Het model van Von Neumann

Een van de meest klassieke toepassingen van lineaire programmering voor een algemeen economisch evenwicht in een expanderende volkshuishouding is gegeven door J. Von Neumann[1]. Zijn gedachten worden in het hiernavolgende in een eenvoudig model weergegeven.

Veronderstellingen

In dit model wordt uitgegaan van de volgende veronderstellingen:
- het produktieproces is circulair d.w.z. goederen worden voortgebracht met goederen, waarbij de voortgebrachte goederen weer de input zijn voor verdere voortbrenging. Met behulp van arbeid worden bijvoorbeeld consumptiegoederen geproduceerd en met de consumptiegoederen wordt in het levensonderhoud van de arbeiders voorzien, zodat in de volgende periode weer nieuwe arbeidseenheden beschikbaar zijn. In feite zijn er dus geen produktiefactoren en geen eindprodukten, maar slechts intermediaire goederen. Deze hypothese was ook de kern van de dynamische stelsels, welke in het vorige hoofdstuk werden behandeld.
- de arbeiders ontvangen slechts een minimum-pakket consumptiegoederen voor levensonderhoud.
- het àantal technieken is groter dan het aantal geproduceerde goederen, zodat voor de produktie van bepaalde goederen meer technische mogelijkheden voorhanden zijn (substitueerbaarheid).
- de produktiefunctie is gebaseerd op de veronderstelling van constant returns to scale.
- de toename van de produktie is niet aan een maximum gebonden, bijvoorbeeld door schaarste van grond.
- de technische coëfficiënten veranderen niet, d.w.z. er heeft geen technische ontwikkeling plaats.
- elk produktieproces duurt één tijdseenheid.

---

1) J. v. Neumann, A Model of General Economic Equilibrium, Review of Economic Studies, jaarg. 13, p. 1-9.
D.G. Champernowne, A note on J. v. Neumann's Article, Review of Economic Studies, jaarg. 13, pag. 10-18.
R.G.D. Allen, Mathematical Economics, Londen 1956, p. 603-607.
R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, p. 381-388.
S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, p. 335-338.

Binnen het kader van deze veronderstellingen wordt gestreefd naar een zodanige produktie, dat van een evenwichtige groei sprake is. Onder evenwichtige groei wordt dan verstaan: een groei, waarbij de produktiestructuur niet verandert in deze zin, dat de verhouding tussen de intensiteiten, waarmee de technieken worden toegepast, constant blijft. Dit houdt in dat de intensiteiten zelf wel mogen veranderen, maar dan in dezelfde verhouding, zodat het produktieproces niet kapitaal- of arbeidsintensiever wordt.

Het model

Voordat deze veronderstellingen worden overgebracht in de notatie welke in par. 2 van dit hoofdstuk gebruikt is, moet eerst de volgende opmerking worden gemaakt: afhankelijk van de verhouding in de beginsituatie zal het lijnstuk AC of CB van grafiek 16 relevant zijn. In het eerste geval wordt c geproduceerd met de kapitaalintensieve en arbeidsintensieve methode en i alleen met de kapitaalintensieve techniek[1], terwijl in het tweede geval alleen bij de i-produktie substitutie tussen arbeid en kapitaal mogelijk is. Verondersteld wordt nu, dat de produktieomvang weer te geven is met een punt op het lijnstuk AC (zie grafiek 16)[2]. Dan geldt:

$$\bar{\alpha}_{c_1}\ c_1\ (t+1) + \bar{\alpha}_{c_2}\ c_2\ (t+1) + \bar{\alpha}_{i_1}\ i_1\ (t+1) = \frac{1}{0_{c_1 c_1}}\ c_1\ (t) + \frac{1}{0_{c_2 c_2}}\ c_2\ (t) \qquad (2.3a.1)$$

$$\bar{\kappa}_{c_1}\ c_1\ (t+1) + \bar{\kappa}_{c_2}\ c_2\ (t+1) + \bar{\kappa}_{i_1}\ i_1\ (t+1) = \frac{1}{V_{i_1 i_1}}\ i_1\ (t) \qquad (2.3a.2)$$

1) De marginale substitutieverhouding van arbeid t.o.v. kapitaal van de i-producent is kleiner dan dit van de c-producent (zie par. 2).

2) Voor CB geldt mutatis mutandis hetzelfde.

$\bar{\alpha}$ en $\bar{\kappa}$ zijn de inputcoëfficiënten en $\frac{1}{0_{c_1 c_1}}$, $\frac{1}{0_{c_2 c_2}}$, $\frac{1}{V_{i_1 i_1}}$ de outputquoten per eenheid c_1, c_2 of i_1.
In de periode t wordt een bepaalde hoeveelheid c voortgebracht. Kent men het levensonderhoud van de arbeiders (0), dan kan uit de produktie van c-goederen in de vorige periode bepaald worden hoeveel arbeiders in het begin van de volgende periode beschikbaar zijn. Het rechter gedeelte van de eerste vergelijking is dus slechts een andere weergave van 1 (t).
Deze arbeidseenheden worden in de periode t + 1 voor de c- en i-produktie ingeschakeld. De produktie geschiedt voor het c-goed met twee technieken, voor het i-goed met één. Uit de i-produktie in t wordt op dezelfde wijze de kapitaalgoederenvoorraad voor t + 1 bepaald. Zo wordt de output van de eerste periode de input in de tweede, met behulp waarvan de produktie in t + 1 volgens de bekende technische mogelijkheden (met behulp van $\bar{\alpha}$ en $\bar{\kappa}$) wordt voortgezet. In feite is dus de output van de vorige periode de beperkende factor voor de produktie in de volgende periode, d.w.z. deze output speelt de rol van produktiefactor.
De input-output-verhouding is hier weergegeven in vergelijkingen. Algemener zou men kunnen uitgaan van ongelijkheden[1)] maar in de vorige paragraaf is naar voren gekomen, dat volledige inschakeling van produktiefactoren bij de geldende technische verhoudingen binnen bepaalde grenzen steeds mogelijk is. Van ongelijkheden is slechts sprake als één factor overvloedig is.

De groeifactor

In de verhouding waarin de produktietechnieken worden toegepast, komt bij evenwichtige groei, zoals deze door Von Neumann wordt gedefinieerd, geen verandering. Dit houdt bij vaste technische coëfficiënten (constant returns to scale) in, dat ook de verhouding tussen de produktie van arbeid en kapitaal ($c_1 + c_2$ en i_1) dezelfde blijft. Omdat bovendien de produktieverhouding tussen de consumptiegoederen, voortgebracht volgens de kapitaal-

1) Von Neumann gaat uit van ongelijkheden en komt aldus tot verdergaande conclusies over groei en rendement. Deze worden hier niet behandeld.

intensieve techniek, en die volgens de arbeidsintensieve techniek per definitie niet mag veranderen, impliceert evenwichtige groei:

$$\frac{c_1\ (t+1)}{c_1\ (t)} = \frac{c_2\ (t+1)}{c_2\ (t)} = \frac{i_1\ (t+1)}{i_1\ (t)} = \rho \qquad (2.3a.3)$$

De tijdsindices kan men nu elimineren via substitutie van (2.3a.3) in (2.3a.1) en (2.3a.2):

$$\rho\ (\bar{\alpha}_{c_1}\ c_1 + \bar{\alpha}_{c_2}\ c_2 + \bar{\alpha}_{i_1}\ i_1) = \frac{1}{0_{c_1\,c_1}} c_1 + \frac{1}{0_{c_2\,c_2}} c_2 \qquad (2.3a.4)$$

$$\rho\ (\bar{\kappa}_{c_1}\ c_1 + \bar{\kappa}_{c_2}\ c_2 + \bar{\kappa}_{i_1}\ i_1) = \frac{1}{V_{i_1\,i_1}}\ i_1 \qquad (2.3a.5)$$

Onder de hypothese, dat elke arbeider één c-goed als noodzakelijk levensonderhoud nodig heeft en elke verbruikte kapitaaleenheid vervangen wordt door één i-goed (dus $0_{c_1\,c_1} = 0_{c_2\,c_2} = V_{i_1\,i_1} = 1$) en rekening houdend met de volgende definities:

$$c_1 + c_2 = c$$

$$i_1 = i$$

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_c} = \frac{\bar{\kappa}_{c_1} - \bar{\kappa}_{c_2}}{\bar{\alpha}_{c_2}\ \bar{\kappa}_{c_1} - \bar{\alpha}_{c_1}\ \bar{\kappa}_{c_2}} \qquad \text{(zie (2.2.9)}$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_c} = \frac{\bar{\alpha}_{c_2} - \bar{\alpha}_{c_1}}{\bar{\alpha}_{c_2}\ \bar{\kappa}_{c_1} - \bar{\alpha}_{c_1}\ \bar{\kappa}_{c_2}} \qquad \text{(zie (2.2.10)}$$

kan uit de vergelijkingen (2.3a.4) en (2.3a.5) worden afgeleid dat de groeifactor gelijk is aan:

$$\rho = \frac{\dfrac{c}{\hat{\bar{\alpha}}_c} + \dfrac{i}{\hat{\bar{\kappa}}_c}}{c + \left(\dfrac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\hat{\bar{\kappa}}_c} + \dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\hat{\bar{\alpha}}_c} \right) i} \tag{2.3a.6}$$

Het rendement

In navolging van de vergelijkingen (2.2.5) t/m (2.2.8) en (1.4a.22), (1.4a.23), (1.4a.24) zijn de prijsvergelijkingen in dit model:

$$p_c\ (t) = \bar{\alpha}_{c_1}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{c_1}\ \bar{p}_R\ (t) \tag{2.3a.7}$$

$$p_c\ (t) = \bar{\alpha}_{c_2}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{c_2}\ \bar{p}_R\ (t) \tag{2.3a.8}$$

$$p_i\ (t) = \bar{\alpha}_{i_1}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{i_1}\ \bar{p}_R\ (t) \tag{2.3a.9}$$

$$\bar{p}_L\ (t) = 1 \tag{2.3a.10}$$

$$\bar{p}_L\ (t) = p_L\ (t) + p_c\ (t) \tag{2.3a.11}$$

$$\bar{p}_R\ (t) = p_R\ (t) + p_i\ (t) \tag{2.3a.12}$$

$$r = \frac{\bar{p}_L\ (t)}{p_c\ (t)} \left(= \frac{\bar{p}_R\ (t)}{p_i\ (t)} \right) \tag{2.3a.13}$$

Uit dit stelsel is met behulp van de definities van (2.2.9) en (2.2.10) af te leiden, dat:

$$\frac{\bar{p}_R\ (t)}{\bar{p}_L\ (t)} = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_c}{\bar{\bar{\kappa}}_c}$$

en

$$p_c\ (t) = \bar{\bar{\alpha}}_c\ \bar{p}_L\ (t) = \bar{\bar{\kappa}}_c\ \bar{p}_R\ (t)$$

Hieruit volgt, in samenhang met (2.3a.9)

$$p_i\ (t) = \bar{\bar{\kappa}}_c \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right) \bar{p}_R\ (t)$$

en

$$\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} = \frac{p_i\ (t)}{p_c\ (t)} \qquad (2.3a.14)$$

In samenhang voorts met (2.3a.13):

$$\frac{p_i\ (t)}{p_c\ (t)} = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_c}{\bar{\bar{\kappa}}_c} = \frac{\bar{p}_R\ (t)}{\bar{p}_L\ (t)} \qquad (2.3a.15)$$

Het bruto feitelijk rendement wordt dus:

$$\boxed{r = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c} = \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\kappa_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right)}} \qquad (2.3a.16)$$

Conclusies

Het bruto feitelijk rendement moet voor elke produktiefactor gelijk zijn, omdat alleen dan tot uitbreiding van arbeid en kapitaal wordt overgegaan als de opbrengstwaarde ($\bar{p}_L$ (t) en $\bar{p}_R$ (t)) t.o.v. de vervangingswaarde (p_c (t) en p_i (t)) voor iedere factor gelijk is (zie beschouwing bij (1.4a.24)). Wordt nl. door uitbreiding van de ene factor reëel meer verdiend dan door uitbreiding van de andere, dan zal de eerste factor bij de produktie de voorkeur verdienen.
In (2.3a.16) is weergegeven dat dit bruto feitelijk rendement gelijk is aan het grensprodukt van arbeid of beter van die produktiefactor welke volgens twee technieken "geproduceerd" moet worden. De c-produktie zal hier volgens twee produktietechnieken geschieden, omdat beide dezelfde kosten hebben en dezelfde meerwaarde opleveren. Overschakeling van de ene naar de andere techniek zal dus geen verhoging van het rendement tot gevolg hebben.
Door Schouten werd reeds afgeleid, dat de verhouding van de beloningsvoeten van arbeid en kapitaal gelijk is aan de marginale substitutieverhouding van de produktiefactoren, en dat de prijsverhouding van c en i gelijk is aan de hellingshoek van het relevante stuk van de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden en daarmee gelijk aan de desbetreffende substitutieverhouding (2.3a.14)[1].
Daar verder de c- en i-produktie slechts een tussenweg is voor de vergroting van de produktiefactoren arbeid en kapitaal en het bruto rendement van beide produktiefactoren gelijk is, kan hier bovendien worden afgeleid, dat de marginale substitutieverhouding van de produktiefactoren gelijk is aan die van de eindprodukten (2.3a.15).
Nu in de prijsvergelijkingen blijkt, dat

$$\frac{\bar{\bar{\alpha}}_c}{\bar{\bar{\kappa}}_c} = \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right)$$ gaat vergelijking (2.3a.6) over in

$$\rho = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c} \qquad (2.3a.17)$$

1) Exacte Economie, pag. 127 en 130.

De groeifactor (ρ) en de rendementsfactor (r) zijn wederom aan elkaar gelijk "The interest factor and the coëfficiënt of expansion of the economy are equal and determined by the technically possible processes"[1].

Slotopmerkingen

- Daar de relaties ter bepaling van de volume- en prijsgrootheden en bloc zijn weergegeven, is het niet nodig alle vergelijkingen te herhalen (zie (2.3a.1) t/m (2.3a.3) en (2.3a.7) t/m (2.3a.13)).
- Von Neumann leidt de gelijkheid van de rendementsfactor en de groeifactor op een andere wijze af. Zijn bewijsvoering luidt in de symbolen van deze studie: na vermenigvuldiging van (2.3a.4) en (2.3a.5) respectievelijk met p_c en p_i is:

$$\rho = \frac{\frac{1}{0_{c_1 c_1}} c_1 p_c + \frac{1}{0_{c_2 c_2}} c_2 p_c + \frac{1}{V_{i_1 i_1}} i_1 p_i}{\bar{\alpha}_{c_1} c_1 p_c + \bar{\alpha}_{c_2} c_2 p_c + \bar{\alpha}_{i_1} i_1 p_c + \bar{\kappa}_{c_1} c_1 p_i + \bar{\kappa}_{c_2} c_2 p_i + \bar{\kappa}_{i_1} i_1 p_i}$$

(2.3a.18)

Indien men in (2.3a.7) t/m (2.3a.9) $\bar{p}_L$ (t) en $\bar{p}_R$ (t) met behulp van (2.3a.13) vervangt door rp_c (t) en rp_i (t) en de leden van de drie vergelijkingen daarna vermenigvuldigt met respectievelijk c_1, c_2 en i_1 verkrijgt men voor r dezelfde uitkomst als voor ρ. Daar de teller van deze relatie de opbrengst en de noemer de kosten van het produktieproces weergeeft (p_c = reproduktiewaarde van arbeid; p_i = vervangingswaarde van kapitaal) is (r) dus gelijk aan de verhouding tussen deze grootheden.
In woorden betekent dit, dat, indien alle meerwaarde, bij handhaving van eenzelfde produktiestructuur, voor extra produktie wordt bestemd, het totale rendement en de produktie-index aan elkaar gelijk zijn.

1) J. Von Neumann, Review of Economic Studies, 13, pag. 8.

Cijfervoorbeeld 11

Gegeven : voor $\bar{\alpha}$ en $\bar{\kappa}$: zie cijfervoorbeeld 10,

$$c\ (t) = 1400 \qquad i\ (t) = 1900$$

$$0_{c_1 c_1} = 0_{c_2 c_2} = V_{i_1 i_1} = 1$$

Gevraagd: de volumina en de prijzen.

Oplossing:

$$\left.\begin{array}{l} \rho\ \{1/5\ c_1 + 7/15\ (1400 - c_1) + 2/15\ .\ 1900\} = 1400 \\ \\ \rho\ \{2/5\ c_1 + 2/15\ (1400 - c_1) + 7/15\ .\ 1900\} = 1900 \end{array}\right] \rho = 5/3 \qquad \begin{array}{r} (2.3a.4) \\ \\ (2.3a.5) \end{array}$$

$$c\ (t) = 1400 \longrightarrow c\ (t + 1) = \frac{7000}{3}$$

$$i\ (t) = 1900 \longrightarrow i\ (t + 1) = \frac{9500}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} r\left[\bar{\alpha}_{c_1}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{c_1}\ \bar{p}_R\ (t)\right] = \bar{p}_L\ (t) \\ \\ r\left[\bar{\alpha}_{c_2}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{c_2}\ \bar{p}_R\ (t)\right] = \bar{p}_L\ (t) \\ \\ r\left[\bar{\alpha}_{i_1}\ \bar{p}_L\ (t) + \bar{\kappa}_{i_1}\ \bar{p}_R\ (t)\right] = \bar{p}_R\ (t) \\ \\ \bar{p}_L\ (t) = 1 \\ \\ r = \dfrac{\bar{p}_L\ (t)}{p_c\ (t)} = \dfrac{\bar{p}_R\ (t)}{p_i\ (t)} \end{array}\right|$$

zie (2.3a.7) t/m (2.3a.13)

$\bar{p}_L\ (t) = 1 \quad p_c\ (t) = 3/5$

$\bar{p}_R\ (t) = 1 \quad p_i\ (t) = 3/5$

$r = 5/3$

Nationaal inkomen in t en t + 1

t	t + 1
Volume x prijs = waarde	Volume x prijs = waarde
$c(t) \cdot p_c(t)=1400 \times 3/5=$ 840	$c(t+1) \cdot p_c(t+1)=7000/3 \cdot 3/5=$ 1400
$i(t) \cdot p_i(t)=1900 \times 3/5=$ 1140	$i(t+1) \cdot p_i(t+1)=9500/3 \cdot 3/5=$ 1900
subtotaal 1980	subtotaal 3300
Δ y(t) (totale rendement)=(5/3 - 1) . 1980=1320	Δ y(t+1) (totale rendement = (5/3 - 1) . 3300 = 2200
Totaal 3300	Totaal 5500

b) Het model van Malinvaud

De kritiek op het model van Von Neumann

In navolging van de door Leontief gegeven definitie van evenwichtige groei, is in het model van Von Neumann als voorwaarde voor de ontwikkeling gesteld, dat de verhouding tussen de intensiteiten waarmee de technieken worden toegepast, constant blijft. Tezamen met de veronderstelling, dat het produktieproces circulair is, geeft deze evenwichtsvoorwaarde aan het model van Von Neumann een zeer beperkte realiteitswaarde. Uit de produktiemogelijkheden van de beginperiode wordt door de structuureisen een bepaalde produktie als de ideale gekozen, ook voor de toekomst. Een afwijking in één van de volgende perioden is niet mogelijk. De verdeling van de totale produktie over c- en i-goederen en daarmee de consumptie- en investeringsmogelijkheden liggen voor alle perioden vast.

Het model van Malinvaud

Uitgaande van het statisch model van Schouten wordt nu een groeimodel ontwikkeld, dat aansluit bij het bredere dynamische model

van Malinvaud[1]. Dit model laat de keuze tussen consumeren en investeren in elke periode bestaan.
In elke periode is er nl. een volledige lijn van meest efficiente produktiemogelijkheden en de economische subjecten kunnen elk tijdsinterval opnieuw kiezen, welk punt op deze lijn zal worden gerealiseerd.
In een artikel in Econometrica wordt, in wiskundige vorm, het volledige model ontwikkeld. Vele van de voorwaarden welke daar worden genoemd, zijn in het voorafgaande reeds expliciet of impliciet aangegeven, zodat het niet nodig is deze passages hier opnieuw te bespreken (o.a. optelbaarheid en deelbaarheid van de activiteiten; efficiente en optimale produktie). Verder worden, om aansluiting bij het model van Schouten te verkrijgen, enkele vereenvoudigingen ingevoerd, zoals vaste technische coëfficiënten en overvloed van natuurlijke hulpbronnen.

Gaat men in het statische model van Schouten uit van de directe in plaats van gecumuleerde factorquoten, dan kan men stellen, dat tussen het eerste uiterste punt (produktie van c_1 en c_2) en het derde (produktie van $c_2 + i_1$) de transformatiefunctie aldus luidt (zie (2.2.3)):

$$c = -\left(\frac{\bar{a}_{i_1}}{\bar{\bar{a}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right) i + \frac{1}{\bar{\bar{a}}_c}\,\bar{l} + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\,\bar{k}$$

Door het aanbrengen van tijdsindices kan met deze vergelijking een dynamisch model worden opgebouwd. Verondersteld wordt nu, dat door het aanwenden van arbeid en kapitaal in de periode t, in t + 1 consumptie- en investeringsgoederen voor verbruik beschikbaar zijn. De consumenten bepalen hoe de verhouding tussen deze twee soorten eindprodukten zal zijn. De investeringsgoederen worden gebruikt voor vervanging van de verbruikte kapitaaleenheden en eventuele vergroting van de produktiecapaciteit, de

1) E. Malinvaud, Capital accumulation and efficient allocation of resources, Econometrica, 1953 p. 233.
Tj. C. Koopmans, 3 essays on the state of economic science, New York 1957, p. 105-126.

consumptiegoederen worden gevraagd door de arbeiders, wier aantal per tijdseenheid gegeven is.
Onder deze hypotheses worden de vergelijkingen betreffende de produktie:

de transformatiefunctie:

$$c\ (t+1) + \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right) i\ (t+1) = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c}\ \bar{l}\ (t) + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\ k\ (t) \tag{2.3b.1}$$

de aanbodsfunctie van kapitaal, betreffende de kapitaalgoederenvoorraad op het einde van periode t:

$$i\ (t) = k\ (t) \tag{2.3b.2}$$

de aanbodsfunctie van arbeid; de beschikbare beroepsbevolking op het einde van periode t:

$$\bar{l}\ (t) = \text{gegeven} \tag{2.3b.3}$$

In elke periode staan de economische subjecten voor het keuzeprobleem: "Is het efficient nu te sparen om aldus de produktie in de toekomst uit te breiden?" Het verloop van de ontwikkeling van de economische grootheden (c, i, en k) is nu geheel afhankelijk van de oplossing, die de economische subjecten in elke periode opnieuw, aan dit keuzeprobleem geven.
Uitgaande van het gegeven model is vanuit elk punt van de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden van de periode t, d.w.z. bij elk mogelijk efficient investeringsvolume, met de gegeven hoeveelheid arbeidseenheden op het einde van t, een produktielijn van t + 1 te berekenen. De verbinding van de uiterste punten van deze lijnen vormt weer een gebroken lijn, gelijkend op de enveloppes van het model van Dorfman-Samuelson-Solow (zie o.a. grafiek 14). In tegenstelling tot het laatstgenoemde model zijn echter thans arbeid en kapitaal steeds volledig in het produktieproces ingeschakeld, hetgeen mogelijk wordt gemaakt door de substitueerbaarheid van arbeid en kapitaal.

Twee vraagsituaties

Het effect van een vermindering van de vraag naar consumptiegoederen in t is, dat er, bij volledige inschakeling van de produktiefactoren in een efficient programma, meer investeringsgoederen geproduceerd zullen worden. Door de vergroting van het investeringsvolume in t zal de kapitaalgoederenvoorraad groter zijn (zie (2.3b.2)), zodat de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden zich verder van de oorsprong verwijdert. Deze grotere produktiecapaciteit kan weer voor de produktie van c- en i-goederen worden aangewend. Steeds staan de economische subjecten voor een keuze. Dit keuzeprobleem is voor de volkshuishouding een economisch probleem. De economische subjecten moeten in elke periode beslissen of zij nu meer zullen consumeren of, via grotere investeringen ten koste van de meer-consumptie van nu, de consumptiemogelijkheden van de toekomst zullen vergroten. Deze keuze wordt natuurlijk bepaald door het resultaat van de toename van de investeringen.
Om het effect van de meer-investeringen goed te meten, zal van twee vraagsituaties worden uitgegaan (I en II). Schematisch kan men deze aldus weergeven.

	t	t + 1	t + 2	t + 3
Situatie I	$c(t)$; $i(t)$	$c(t+1)$; $i(t+1)$	$c^{+}(t+2)$; $i(t+2)$	$c(t+3)$; $i(t+3)$
Situatie II	$c(t)$; $i(t)$	$c^{+}(t+1)$; $i^{-}(t+1)$	$c(t+2)$; $i(t+2)$	$c(t+3)$; $i(t+3)$

In t wordt dus in I en II hetzelfde geproduceerd en gevraagd zodat de hoeveelheid arbeid (2.3b.3) en kapitaal (2.3b.2) op het einde van t gelijk zijn. In t + 1 groeien de situaties uit elkaar: in II worden nl. meer consumptiegoederen (c^{+} (t + 1)) en dus minder i-goederen (i^{-} (t + 1)) geproduceerd dan in I. Het effect van dit verschil in produktie is:

$$\mathrm{I}: c\,(t+1) + \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right) i\,(t+1) = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c}\, \bar{\mathrm{I}}\,(t) + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\, i\,(t)$$

$$\text{II:}\quad c^{+}(t+1) + \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right) i^{-}(t+1) = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c}\,\bar{I}(t) + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\, i(t)$$

II - I:

$$c^{+}(t+1) - c(t+1) = \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)\{i(t+1) - i^{-}(t+1)\}$$

Indien dus in situatie II één eenheid c meer geproduceerd wordt dan in situatie I is het verschil in i (t + 1) gelijk aan

$$\frac{1}{\left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} = \frac{p_c}{p_i} \qquad \text{(zie (2.3a.14)} \qquad (2.3b.4)$$

De hogere produktie van investeringsgoederen in situatie I t.o.v. II heeft tot gevolg, dat in het begin van t + 2 meer kapitaalgoederen voor de voortbrenging van c-goederen beschikbaar zijn. Omdat in t + 2 de produktie van i in beide situaties gelijk is verondersteld (zie schema) kan de extra investering in situatie I worden aangewend voor meer consumptiegoederen. Het effect kan uit (2.3b.1) direct worden bepaald. Het grensprodukt van kapitaal uitgedrukt in c-goederen is nl. $\frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}$, zodat in situatie I

$$\frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\,\frac{p_c}{p_i} = \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c\left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} = r$$

meer c (t + 2) beschikbaar is dan in II. (2.3b.5)

Per gespaard consumptiegoed komt dus $\frac{p_c}{p_i}$ kapitaalgoed beschikbaar dat in de volgende periode $\frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\,\frac{p_c}{p_i}$ consumptiegoed kan voortbrengen.

(2.3b.5) stelt derhalve het grensprodukt voor van één opgeofferd consumptiegoed, uitgedrukt in consumptiegoederen van de volgende periode (marginaal rendement van de besparingen). Zolang het produktiepunt zich op hetzelfde stuk van de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden blijft bevinden, is het marginale rendement van het consumptie-offer gelijk aan het gemiddelde feitelijk kapitaalrendement.

De discontovoet

De consumenten in situatie I zullen echter met deze vermindering van c-goederen in t + 1 slechts genoegen nemen als de constante waarde van de toekomstige hogere consumptie tenminste gelijk is aan de waarde van de hoeveelheid welke nu wordt opgeofferd.

Dit houdt in: $$p_c\,(t+1)\,\{c^+\,(t+1) - c\,(t+1)\} = \frac{p_c\,(t+2)\,\{c^+\,(t+2) - c\,(t+2)\}}{r^*} \qquad (2.3b.6)$$

Hierin stelt (r^*) de discontovoet voor, met behulp waarvan de consumenten de toekomstige consumptie disconteren om deze vergelijkbaar te maken met de huidige consumptie (gewenste rendement). Daar bij onveranderlijke substitutieverhouding van c en i (deze geldt voor alle produktiepunten welke liggen op hetzelfde rechte stuk van de gebroken lijn van de meeste efficiente produktiemogelijkheden: zie AC van grafiek 16) de prijsverhouding $\frac{p_c}{p_i}$ constant blijft, kan men stellen, dat, - als tevens de geldhoeveelheid aangepast wordt aan de stijging van de produktie - ook de absolute prijzen constant zullen blijven ($p_c\,(t+1) = p_c\,(t+2)$). Uit (2.3b.5) en (2.3b.6) volgt dan bij een gelijkheid van feitelijk en gewenst rendement als algemene norm voor keuze tussen consumeren en investeren:

$$r^* = \frac{c^+\,(t+2) - c\,(t+2)}{c^+\,(t+1) - c\,(t+1)} = \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c\left(\dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \dfrac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} = r \qquad (2.3b.7)$$

Ook op een andere wijze kan men uit de gegevens de discontovoet bepalen. In periode t + 1 nl. wordt in situatie I een relatief grotere hoeveelheid i voortgebracht. Deze goederen hebben een bepaalde waarde nl. $p_i\ (t + 1)\ \{i\ (t + 1) - i^-\ (t + 1)\}$. De waarde van de consumptieve output van deze extra investering in t + 2 is gelijk aan $p_c\ (t + 2)\ \{c^+\ (t + 2) - c\ (t + 2)\}$. De extra winst als gevolg van de besparing, d.w.z. het effect van het afzien van consumptiegoederen ten behoeve van de produktie van investeringsgoederen is:

$$\frac{p_c\ (t + 2)\ \{c^+\ (t + 2) - c\ (t + 2)\} - p_i\ (t + 1)\ \{i\ (t + 1) - i^-\ (t + 1)\}}{p_i\ (t + 1)\ \{i\ (t + 1) - i^-\ (t + 1)\}} \tag{2.3b.8}$$

Conclusie

Noemt men het effect van de besparing het marginale verwachte rendement van de besparingen, dan kan men stellen, dat dit marginale rendement en de discontovoet van de consumenten, waarmee zij toekomstgoederen en hedengoederen vergelijken, aan elkaar gelijk moeten zijn.

Over deze gelijkheid van bedoeld rendement en discontovoet zegt Boulding: "... the rate of return in an enterprise is that rate which will make the present value of the product of input which is now going into the enterprise equal to the value of that input. The product of a given year's input will in general be greater in value than the input itself, but will appear of a later date; the rate of discounting necessary to bring the present value of the product down to the value of the input, which produces it, is the rate of return in the enterprise"[1].

Aan de groei van de kapitaalvoorraad zijn echter in het model van Schouten en dus eveneens in dit dynamisch model, grenzen gesteld. Het is nl. mogelijk dat een vergroting van de voorraad kapitaal geen verhoging van de consumptie tot gevolg heeft, omdat kapitaal t.o.v. arbeid absoluut overvloedig wordt. Als nl. de

1) K.E. Boulding, The theory of a single investment, Quarterly Journal of Economics, j. 49, p. 485.

hoeveelheid $\bar{k}$ zo groot is t.o.v. $\bar{l}$, dat zelfs bij de meest kapitaalintensieve produktie van c en i (c_1 en i_1) niet alle kapitaaleenheden in het proces kunnen worden ingeschakeld, is van kapitaalovervloed sprake[1]. Daar dan de toekomstige consumptie door een verlaging van het huidige verbruik niet meer kan toenemen, heeft de besparing geen rendement en zal er dus niet gespaard worden.

Cijfervoorbeeld 12 (zie cijfervoorbeeld 10)

Gegeven:

$\bar{\alpha}_{c_1} = 1/5 \qquad \bar{\alpha}_{c_2} = 7/15 \qquad \bar{\alpha}_{i_1} = 2/15 \qquad \bar{\alpha}_{i_2} = 5/11$

$\bar{\kappa}_{c_1} = 2/5 \qquad \bar{\kappa}_{c_2} = 2/15 \qquad \bar{\kappa}_{i_1} = 7/15 \qquad \bar{\kappa}_{i_2} = 5/16$

$l\ (t) = 1400; \quad l\ (t+1) = \frac{7000}{3}; l\ (t+2) = \frac{35000}{9}; k\ (t) = 1900$

Het lijnstuk tussen het eerste en derde uiterste punt is:

$$c\ (t+1) + \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right) i\ (t+1) = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c}\ l\ (t) + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\ k\ (t)$$

dus $c\ (t+1) + i\ (t+1) = 5/3 \ .\ 1400 + 5/3\ .\ 1900$

$\bar{p}_L = \bar{p}_R = 17{,}5;\ p_c = p_i = 10{,}5;\ p_L = p_R = 7$ (cijfervoorbeeld 10).

Het gekozen schema is:

	t + 1		t + 2	
	c (t + 1)	i (t + 1)	c (t + 2)	i (t + 2)
Situatie I	3500	2000	46100/9	2100
Situatie II	3600	1900	44600/9	2100
Situatie I - II	-100	+100	500/3	0

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, p. 139-141.

In t + 1 worden dus in situatie I 100 consumptiegoederen minder gevraagd. Omdat de substitutieverhouding tussen c en i gelijk is aan

$$\left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right) = 1,$$ resulteert deze besparing in een verhoging

van de produktie van investeringsgoederen van 100. Als k (t + 1) toeneemt met 100 kan de hoeveelheid c (t + 2) toenemen met $\frac{500}{3}$.
In periode t + 2 kan men produceren:

$i\ (t + 2) = 2100$

$$\left.\begin{array}{l} c\ (t + 2):\ \mathrm{I}:\ \frac{46100}{9} \\[2ex] \qquad\qquad\ \ \mathrm{II}:\ \frac{44600}{9} \end{array}\right] \quad \mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}:\ \frac{1500}{9} = \frac{500}{3}$$

De meeropbrengst voortvloeiende uit de besparing is dus 5/3 x de besparing, zodat het marginale rendement bruto gelijk is aan 5/3 en netto aan 2/3.
In t + 2 is de produktie dus weer gebaseerd op $l\ (t + 2) = \frac{35000}{9}$ en $k\ (t + 2) = 2100$, zodat de lijnen van de meest efficiente produktiemogelijkheden van I en II weer samenvallen.

Ook met behulp van (2.3b.8) kan het netto-effect berekend worden:

$$\frac{p_c\,(t+2)\,\{c^+\,(t+2) - c\,(t+2)\} - p_i\,(t+1)\,\{i\,(t+1) - i^-\,(t+1)\}}{p_i\,(t+1)\,\{i\,(t+1) - i^-\,(t+1)\}} =$$

$$\frac{\frac{21}{2} \cdot \frac{500}{3} - \frac{21}{2} \cdot 100}{\frac{21}{2} \cdot 100} = \frac{2}{3}$$

c) De modellen van Marx en Walras

In de voorafgaande gedeelten van deze paragraaf zijn enkele dynamische modellen met substitutiemogelijkheden tussen kapitaal en arbeid geanalyseerd. Deze modellen waren echter zeer eenvoudig. In het model van Von Neumann was de eis van de "produktie van arbeidskrachten" erg Malthusiaans getint, terwijl in het model van Malinvaud het rendement van besparingen slechts door een vergelijking van twee produktieschema's kon worden verklaard. In het volgende zullen meer volledige modellen ontwikkeld worden[1].
Voor wat de technische structuur betreft, wordt ook nu uitgegaan van het model van Von Neumann. Dit houdt in, dat er substitutie tussen de produktiefactoren arbeid en kapitaal kan plaatsvinden, dat er constante meeropbrengst is binnen het substitutiegebied en dat de groei in het model wordt opgenomen.
In afwijking van Von Neumann wordt thans, evenals in het laatste model van het eerste hoofdstuk, gesteld, dat de arbeidsbevolking toeneemt met een vast percentage, dat de arbeiders hun loon (o.a. meerwaardeloon) uitsluitend consumptief besteden en dat de kapitaalbezitters hun inkomen aanwenden zowel voor consumptiegoederen als voor investeringen.
In dit meer algemene model zullen nu enkele ideeën van twee klassieke auteurs, t.w. Marx en Walras, worden opgenomen.

Substitutie

De vraag kan gesteld worden of het verantwoord is in de modellen van de genoemde klassieke auteurs een produktiefunctie met substitutiemogelijkheden op te nemen. Samuelson zegt hierover[2]:
"It may be reasonable to believe that Marx, like Ricardo and other early writers, unlike modern neoclassicists, never explicitly thought about that properties of the production function (a

---

1) M. Morishima, Economic expansion and the interest rate in generalized Von Neumann models, Econometrica, april 1960, p. 352 e.v.
P.A. Samuelson, Wages and interest: a modern dissection of Marxian economic models, The American Economic Review, 1957 pag. 884 e.v.
2) P.A. Samuelson, Wages .... p. 906.

concept not yet explicitly defined or named) he wished to posit. It would be reading into him things that he would not recognize to claim a smooth production function with infinite substitution possibilities. On the other hand, he[1] speaks again and again of alternative techniques".
In het algemeen[2] geeft men de theorieën van Marx en Walras weer in modellen, waarin complementariteit van produktiefactoren is verondersteld. Hier wordt echter beperkte substitutie in het model opgenomen, om te laten zien hoe bepaalde conclusies van Marx en Walras ook dan naar voren komen.

De modellen

In tegenstelling met de behandeling van de denkschema's die in de beide voorafgaande delen aan de orde waren, worden hier de modellen volledig weergegeven.

1) Het model van Marx

Produktievergelijkingen:

$$c\ (t + 1) + \left(\frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} \right) i\ (t + 1) = \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c}\ \bar{l}\ (t) + \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\ k\ (t) \tag{2.3c.1}$$

$$l\ (t + 1) = \rho\ \bar{l}\ (t) \tag{2.3c.2}$$

$$\rho = \frac{i\ (t + 1)}{i\ (t)} \tag{2.3c.3}$$

$$i\ (t + 1) = k\ (t + 1) \tag{2.3c.4}$$

---

1) o.a. K. Marx, Das Kapital, hoofdstuk 3: "Dasselbe Quantum Arbeit liefert mehr Metalle in reichhaltigen als in armen Minen".
2) zie o.a. D.B.J. Schouten, Exacte Economie.

Prijsvergelijkingen:

$$p_c = \zeta \, . \, (\bar{\alpha}_{c_1} \, p_c + \bar{\kappa}_{c_1} \, p_i) \qquad (2.3c.5)$$

$$p_c = \zeta \, . \, (\bar{\alpha}_{c_2} \, p_c + \bar{\kappa}_{c_2} \, p_i) \qquad (2.3c.6)$$

$$p_i = \zeta \, . \, (\bar{\alpha}_{i_1} \, p_c + \bar{\kappa}_{i_1} \, p_i) \qquad (2.3c.7)$$

$$\frac{\bar{p}_R}{p_i} = \frac{\bar{p}_L}{p_c} = \zeta \qquad (2.3c.8)$$

Quantiteitsfunctie:

$$\bar{p}_L = 1 \qquad (2.3c.9)$$

Inkomensvorming:

$$L\ (t + 1) = \bar{l}\ (t + 1)\ p_c \qquad (2.3c.10)$$

$$\begin{aligned} Z\ (t) &\equiv (\zeta - 1)\ \{\bar{l}\ (t)\ p_c + k\ (t)\ p_i\} \\ &\equiv (\zeta - 1)\ \{c\ (t + 1)\ (\bar{\alpha}_{c_1}\ p_c + \bar{\kappa}_{c_1}\ p_i) + \\ &\qquad\qquad i\ (t + 1)\ (\bar{\alpha}_{i_1}\ p_c + \bar{\kappa}_{i_1}\ p_i)\} \end{aligned} \qquad (2.3c.11)$$

$$D\ (t) \equiv k\ (t)\ p_i \qquad (2.3c.12)$$

Inkomensbesteding:

$$c\ (t + 1)\ p_c = L\ (t + 1) + \gamma_R\ Z\ (t) \qquad (2.3c.13)$$

Het model omvat dertien vergelijkingen met 13 onbekenden. De onbekenden zijn:
c (t + 1); i (t + 1); l (t + 1); ρ; k (t + 1); p_c; p_i; $\bar{p}_R$; $\bar{p}_L$; ζ - 1 (profitrate van Marx); L (t + 1) (inkomen van de arbeiders); Z (t) (meer-inkomen van de ondernemers); D (t) (waarde van de verbruikte kapitaaleenheden).

Gegeven zijn: γ_R : de consumptiequote van de kapitaaleigenaren,
$\bar{l}$ (t_o) en $\bar{k}$ (t_o): de beginvoorraad van de produktiefactoren,
α en κ : de technische coëfficiënten.

2) Het model van Walras

Prijsvergelijkingen:

$$p_c = \bar{\alpha}_{c_1}\ \bar{p}_L + (r)\ \bar{\kappa}_{c_1}\ p_i \qquad (2.3c.5')$$

$$p_c = \bar{\alpha}_{c_2}\ \bar{p}_L + (r)\ \bar{\kappa}_{c_2}\ p_i \qquad (2.3c.6')$$

$$p_i = \bar{\alpha}_{i_1}\ \bar{p}_L + (r)\ \bar{\kappa}_{i_1}\ p_i \qquad (2.3c.7')$$

$$\frac{\bar{p}_R}{p_i} = r \qquad (2.3c.8')$$

Quantiteitsfunctie:

$$\bar{p}_L = 1 \qquad (2.3c.9')$$

Inkomenvorming:

$$L\ (t + 1) = \bar{l}\ (t)\ \bar{p}_L \qquad (2.3c.10')$$

$$Z\ (t) + D\ (t) = (r)\ k\ (t)\ p_i \qquad (2.3c.11')$$

De andere vergelijkingen, de onbekenden en de gegeven grootheden zijn gelijk aan die van het model van Marx.

Opmerkingen over de modellen

In de produktievergelijking wordt dus, zoals in het voorafgaande vermeld, aangenomen, dat elk produkt op twee wijzen kan worden voortgebracht nl. kapitaalintensief en arbeidsintensief. Evenals in de voorgaande paragrafen, is ook hier verondersteld, dat alleen c volgens twee methoden wordt geproduceerd (2.3c.1). Ten aanzien van het aanbod van arbeidseenheden wordt de "arbeidersproduktiefunctie" van Von Neumann verlaten en expliciet gesteld, dat er een vast algemeen groeipercentage van de arbeidende bevolking is, onafhankelijk van de produktie van c-goederen (2.3c.2). Dit groeipercentage wordt ook aangehouden voor de toename van de kapitaalgoederenvoorraad (2.3c.3) en (2.3c.4). Geeist wordt dus dat de verhouding van arbeid en kapitaal constant blijft. Er is zo een "gleichmässig fortschreitende Wirtschaft", welke omschreven kan worden als: "een volkshuishouding, waarin alle volumina, dus in ons voorbeeld de produktie van consumptie- en investeringsgoederen, de bevolking, de kapitaalgoederenvoorraad en de geldvoorraad, bij gelijkblijvende prijzen en beloningsvoeten exponentieel groeien d.w.z. van jaar tot jaar met een constant percentage toenemen"[1] m.a.w. "each component of the intensity vector increases (or decreases) by a constant percentage for unit of time"[2].

Tot nu toe werden de vergelijkingen besproken welke in beide modellen gelijk zijn. In de prijsvergelijkingen treedt echter een groot verschil naar voren. Marx neemt aan, dat zowel over arbeidsloon als kapitaalkosten winst wordt gemaakt, terwijl bij Walras alleen over de kapitaalkosten feitelijk rendement wordt verkregen. Het meerinkomen van de kapitaalbezitters wordt door hen dus verschillend gedefinieerd. "As for the unit cost of production there are at least two definitions which are historically important: the first is Marx's definition and the second Walras's[3]".

---

1) F. de Roos en D.B.J. Schouten, Groeitheorie, Haarlem 1960, p. 50.
2) M. Morishima, Econometrica, 1960, p. 356.
3) M. Morishima, Econometrica, 1960, p. 353.

Het verschil in opvatting tussen Marx en Walras is echter meer dan een verschil in definitie. In de leer van de uitbuiting van de arbeiders wordt nl. door Marx gesteld, dat alle winst te verklaren is door het verschil in gebruikswaarde (waarde van de produktiviteit; $\bar{p}_L$) en ruilwaarde (onderhoudskosten; p_c) van de factor arbeid. Als arbeid echter schaars is, hetgeen in een model met een arbeidsintensieve en arbeidsextensieve techniek wordt verondersteld, zal er ook meerwaarde aan arbeid toevallen. Marx neemt daarentegen aan, dat deze meerwaarde (gebruikswaarde minus ruilwaarde) uitsluitend aan de kapitalisten ten goede komt en dat de arbeiders slechts de ruilwaarde (p_c) ontvangen. Zo ontvangen de kapitaaleigenaren niet alleen rendement over het vaste kapitaal, maar ook over de arbeidskosten. In (2.3c.5) t/m (2.3c.8) worden de betreffende prijsvergelijkingen gegeven. In deze vergelijkingen komt een zeer bijzonder begrip van de waarde m.n. van die van de kapitaalgoederen naar voren. Dit begrip vindt men telkens in de economische literatuur terug, ofschoon het op dit positieve uitgangspunt van Marx gebaseerd is. Door Marx wordt nl.omtrent de prijzen gezegd "Als Werte sind alle Waren nur bestimmte Masse festgeronnener Arbeitszeit"[1]. Deze stelling kan men bijvoorbeeld voor de i-goederen aldus afleiden: de investeringsgoederen (kapitaaleenheden) worden geproduceerd met $\bar{\alpha}_{i_1}$ eenheden arbeid en $\bar{\kappa}_{i_1}$ eenheden kapitaal, de $\bar{\kappa}_{i_1}$ eenheden kapitaal weer met $\bar{\alpha}_{i_1}$ eenheden arbeid en $\bar{\kappa}_{i_1}$ eenheden kapitaal enz. De in de i-goederen opgenomen arbeid is dus:

$$\bar{\alpha}_{i_1} + \bar{\kappa}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_1} + \bar{\kappa}_{i_1}\bar{\kappa}_{i_1}\bar{\alpha}_{i_1} \; ..... = \bar{\alpha}_{i_1}\left(1 + \bar{\kappa}_{i_1} + \bar{\kappa}_{i_1}^{\,2} \; .....\right) =$$

als $\kappa_{i_1} < 1$

$\dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{1 - \bar{\kappa}_{i_1}}$ eenheden. Daar de door de kapitalisten betaalde prijs van arbeid gelijk is aan p_c en over arbeid winst gemaakt is, kan de waarde van een kapitaalgoed uiteindelijk aldus tot arbeidswaarde worden herleid;

---

1) Das Kapital, hoofdstuk 3.

$$p_i = \bar{\alpha}_{i_1} \{\zeta + \zeta^2 \bar{\kappa}_{i_1} + \zeta^3 \bar{\kappa}_{i_1}{}^2 + \ldots\} p_c = \frac{\bar{\alpha}_{i_1} \zeta}{1 - \bar{\kappa}_{i_1} \zeta} p_c$$

Deze stelling van Marx wordt in vergelijking met (2.3c.7) aldus geformuleerd: $p_i = \zeta\,(\bar{\alpha}_{i_1} p_c + \bar{\kappa}_{i_1} p_i)$, hetgeen hetzelfde is als

$$p_i = \frac{\bar{\alpha}_{i_1} \zeta}{1 - \bar{\kappa}_{i_1} \zeta} p_c$$

Hoewel er derhalve een fundamenteel verschil is in de prijstheorie van Marx en Walras, blijken de bruto winstopslag van Marx en het bruto rendement van Walras aan elkaar gelijk te zijn

$$\zeta = r = \frac{1}{\bar{\hat{k}}_c \left(\frac{a_{i_1}}{\bar{\hat{a}}_c} + \frac{\kappa_{i_1}}{\bar{\hat{\kappa}}_c} \right)} \qquad \text{(zie (2.3c.5) t/m (2.3c.9); (2.3c.14))}$$

De betekenis van deze factoren voor de prijsvorming is echter geheel verschillend, omdat in het eerste model de winst betrokken is op het totale kapitaal (variabel (lonen) + vast) en in het tweede alleen op het vaste kapitaal.

Het laatste onderscheid tussen de beide systemen wordt weergegeven in de vergelijkingen over de inkomenvorming. De arbeiders worden in het model van Marx vooruitbetaald, omdat in het systeem van Marx arbeid als koopwaar, zoals alle waren, betaald moet worden voordat men er over kan beschikken. Het inkomen in t is daarom dan ook reeds in t beschikbaar (2.3c.10). Wordt echter meer rekening gehouden met de realiteit door te veronderstellen, dat de lonen (inclusief de meerwaarde) na het verstrijken van de arbeidsperiode betaald worden, dan zullen de arbeiders het loon voor het werk in de periode t eerst in t + 1 ter beschikking hebben (2.3c.10'). De kapitalisten ontvangen in een bepaalde periode een bruto inkomen, dat bestaat uit netto winst en afschrijvingen d.i. het vrijgekomen geld uit de verbruikte kapitaaleenheden.

Dat de winst bij Marx gevormd wordt uit de winstopslag op lonen en kapitaalkosten en bij Walras alleen door het feitelijk rendement over de waarde van de gebruikte kapitaaleenheden werd reeds besproken.

Conclusies

Past men de volgende bewerkingen toe op het model van Marx:

$$i\ (t+1)\ p_i = \rho_i\ (t)\ p_i = (1-\gamma_R)\ (\zeta - 1)\ \{l\ (t)\ p_c + k\ (t)\ p_i\} - \{l\ (t+1) - l\ (t)\}\ p_c + k\ (t)\ p_i$$

$$\rho\ k\ (t)\ p_i - k\ (t)\ p_i + \rho\ l\ (t)\ p_c - l\ (t)\ p_c =$$

$$(1-\gamma_R)\ (\zeta - 1)\ \{l\ (t)\ p_c + k\ (t)\ p_i\}$$

dan moet worden geconcludeerd dat

$$\rho - 1 = (1-\gamma_R)\ (\zeta - 1) \qquad (2.3c.15)$$

Het groeipercentage (ρ - 1) bij Marx is dus afhankelijk van de investeringsneiging en de winstopslag (zie hoofdstuk I, par. 4). ".... the rate of growth of the economy equals the rate of profit multiplied by the rate of capital accumulation to surplus value"[1]. Nu de consumptieneiging van kapitaalbezitters opgenomen is in het model, zijn de groeifactor en de rendementsfactor dus niet meer aan elkaar gelijk, zoals o.a. in het model van Leontief. "Since profits exceed net investment it is not the case that the rate of profit on capital, in tranquil conditions, is equal to the growth ratio of the economy. In general it is considerably greater"[2].
De consumptieneiging van de kapitalisten (γ_R) bepaalt mede de reële groei. Alleen als γ_R = 0 verkrijgt men de formule, analoog aan die van Von Neumann nl.: $\rho = \zeta$. Het groeipercentage en de

1) M. Morishima, Econometrica, 1960, p. 360.

2) J. Robinson, The accumulation of capital, p. 255.

winstopslag zijn dus slechts in een zeer bijzonder geval aan elkaar gelijk.

Ook uit het geschetste model van Walras kan een soortgelijke formule worden afgeleid nl.:

$$i\ (t + 1)\ p_i - k\ (t)\ p_i + (1 - \gamma_R)\ (r - 1)\ k\ (t)\ p_i$$

$$(\rho - 1) = (1 - \gamma_R)\ (r - 1) \qquad (2.3c.15')$$

"the economy grows at a rate equal to the product of the capitalists' average propensity to save and the rate of profit on capital"[1]. Deze stelling is analoog met (2.3c.15).

Cijfervoorbeeld 13

Gegeven : $\bar{\alpha}_{c_1} = 1/5 \quad \bar{\alpha}_{c_2} = 7/15 \quad \bar{\alpha}_{i_1} = 2/15 \quad \bar{\alpha}_{i_2} = 5/11$

$\bar{\kappa}_{c_1} = 2/5 \quad \bar{\kappa}_{c_2} = 2/15 \quad \bar{\kappa}_{i_1} = 7/15 \quad \bar{\kappa}_{i_2} = 5/16$

$l\ (t) = 1400 \quad k\ (t) = 1900 \quad \gamma_R = 5/8$

Oplossing: (na de bestudering van de voorafgaande cijfervoorbeelden zal de lezer gemakkelijk de volgende uitkomsten verkrijgen).

Het model van Marx:

$c\ (t + 1) = 3125 \quad i\ (t + 1) = 2375$

$l\ (t + 1) = 1750 \quad k\ (t + 1) = 2375$

$p_c = p_i = 3/5 \quad \bar{p}_L = \bar{p}_R = 1 \quad \zeta = 5/3 \quad \rho = 5/4$

$L\ (t + 1) = 1050 \quad Z\ (t) = 1320 \quad D\ (t) = 1140$

---

1) M. Morishima, Econometrica, 1960, p. 362.

Het model van Walras:

$c\ (t + 1) = 3125$ $\quad$ $i\ (t + 1) = 2375$

$l\ (t + 1) = 1750$ $\quad$ $k\ (t + 1) = 2375$

$p_c = p_i = 3/5$ $\quad$ $\bar{p}_R = \bar{p}_L = 1$ $\quad$ $r = 5/3$ $\quad$ $\rho = 5/4$

$L\ (t + 1) = 1400$ $\quad$ $Z\ (t) = 760$ $\quad$ $D\ (t) = 1140.$

HOOFDSTUK III

VERGELIJKING VAN DE BEHANDELDE THEORIEEN

In de voorafgaande hoofdstukken zijn ideeën van verschillende auteurs weergegeven in de vorm, welke door Schouten in "Exacte Economie" werd geintroduceerd. De veelal sterk mathematisch getinte redeneringen van deze auteurs zijn daarbij in eenvoudige wiskundige modellen samengevat. In navolging van Schouten werd verder - in plaats van over een zeer groot aantal - slechts over maximaal twee produktiefactoren, twee eindprodukten en twee technieken per produkt gesproken.
De nadruk viel op de betekenis die de technische coëfficiënten voor bepaalde economische grootheden bleken te hebben. Alle behandelde theorieën werkten nl. met dezelfde veronderstelling t.a.v. de produktiefactoren en de eindprodukten maar - zoals ook uit de indeling in hoofdstukken blijkt - de hypothese over de technische mogelijkheden was telkens verschillend. In hoofdstuk I werd aangenomen, dat voor de voortbrenging van elk goed slechts één produktietechniek bekend is (complementariteit), in hoofdstuk II echter werd gedeeltelijke substitueerbaarheid van de produktiefactoren verondersteld. Enkele theorieën, welke van deze hypotheses uitgaan, werden behandeld.
Toch bestrijkt hetgeen in deze studie betreffende de produktietechniek behandeld is, slechts een gedeelte van de economische problematiek op dit terrein. Hier was de grens van het produktiegebied, de z.g. lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden, steeds een rechte of een gebroken rechte lijn. De vloeiende kromme, welke o.a. door de produktiefunctie van het Cobb-Douglas type ontstaat, werd niet behandeld. De reden daarvan is, dat in de onderhavige studie steeds, in tegenstelling met de hypotheses van Cobb-Douglas, werd uitgegaan van een beperkt aantal technieken, d.w.z. van een beperkt aantal mogelijke substitutieverhou-

dingen van kapitaal en arbeid. Wordt het aantal technieken bijvoorbeeld op maximaal twee per produkt gesteld, dan is daarmee ook het aantal mogelijke substitutieverhoudingen tot twee beperkt. Dit wordt grafisch uitgedrukt door één breukpunt in de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden. De hellingshoeken van de lijnstukken links en rechts van dit breukpunt representeren ieder één van de twee mogelijke substitutieverhoudingen. Deze verhoudingen zijn dus binnen een bepaald gebied constant. Binnen dit gebied is er een constante meeropbrengst.

Alle theorieën, welke behandeld werden, hebben een gemeenschappelijke ondergrond, omdat telkens met een zeer beperkt aantal vaste lineaire technische coëfficiënten per produkt werd gewerkt[1]. Dit maakt het mogelijk bepaalde vergelijkingen te maken en de samenhang van bepaalde conclusies naar voren te brengen. Omdat in de vorige hoofdstukken steeds de redenering van een bepaalde auteur apart is gegeven, meestal zonder verwijzing naar andere delen van de studie, is het nodig de gemeenschappelijke punten nader te bespreken. Dit zal in dit hoofdstuk geschieden. Achtereenvolgens zal aandacht worden geschonken aan:

a) de produktiecoëfficiënten,
b) de groeifactor,
c) het feitelijk rendement van het kapitaal.

a) De produktiecoëfficiënten

De produktiestructuur van de behandelde modellen werd vooral geanalyseerd aan de hand van de transformatiefuncties van arbeid en kapitaal, waardoor met behulp van een c-as en een i-as werd aangegeven, hoe groot de produktie-omvang bij inschakeling van de gegeven produktiefactoren maximaal kan zijn. De nadruk viel daarbij op het produktieresultaat in de vorm van c- en i-goederen. De voorwaarden, m.n. die van volledige inschakeling van arbeid en kapitaal werden algebraïsch afgeleid. Het is nochtans mogelijk deze voorwaarden ook grafisch weer te geven.

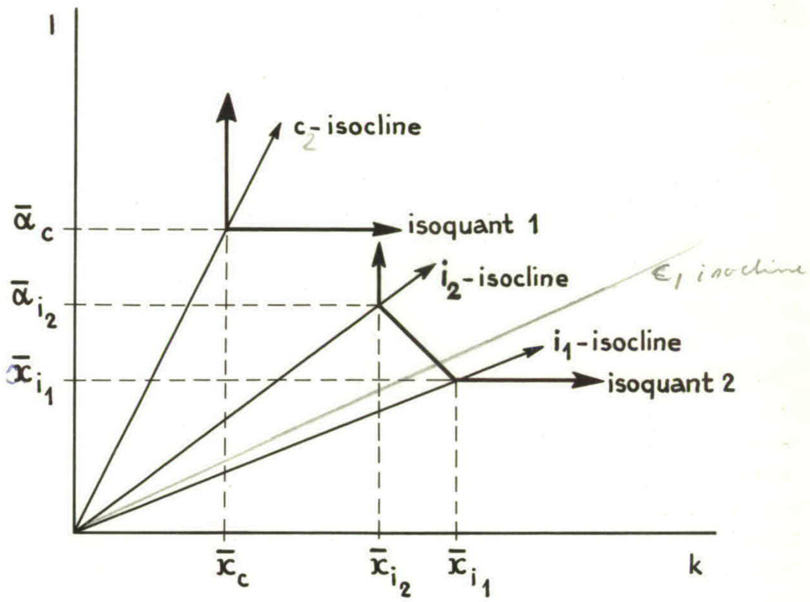
1) Zie o.a., S.L. Louwes, Activiteitsanalyse, lineaire programmering en hun toepassingen, De Economist, jaarg. 103, p. 817-853 en jaarg. 104, p. 40-56.

De eis van volledige inschakeling van de produktiefactoren alsmede de betekenis van de produktiequoten voor de verschillende modellen kan nl. grafisch worden toegelicht met behulp van een "isoclinen en isoquanten"-stelsel. De isoclinen geven aan hoe de juiste verhouding van de ingeschakelde produktiefactoren voor een bepaald produkt bij een gegeven techniek is, m.a.w. hoe met iedere bekende techniek, welke bij de voortbrenging van een bepaald produkt kan worden toegepast, één verhouding van arbeid en kapitaal correspondeert. Zijn bij één gegeven techniek in de c-industrie per eenheid c bijvoorbeeld $\bar{\alpha}_c$-eenheden arbeid en $\bar{\kappa}_c$-eenheden kapitaal nodig dan is de c-isocline bepaald (zie grafiek 17). De isoquant kan worden gedefinieerd als de (gebroken) verbindingslijn van de punten, "die de verschillende noodzakelijke minimum combinaties van produktiefactoren aangeven, welke combinaties alle eenzelfde hoeveelheid eindprodukt kunnen opleveren[1]". Is nu voor de produktie van het c-goed slechts één techniek bekend (complementariteit) dan is de vorm van de isoquant, als in grafiek 17 door isoquant 1 aangegeven. Zijn echter meerdere technieken bij de voortbrenging van een bepaald goed gegeven, m.a.w. is er sprake van gedeeltelijke substitueerbaarheid van arbeid en kapitaal, dan ontstaat isoquant 2 (zie pag. 138).
Uit de definities en de grafische weergave van de isoquanten blijkt duidelijk, dat toevoeging van arbeid of kapitaal in een proces met complementariteit van de produktiefactoren, geen effect heeft. Daarentegen zal bij gedeeltelijke substitueerbaarheid een vergroting van de ingeschakelde hoeveelheid van één van de factoren meestal wel een produktietoename tot gevolg hebben.
Aan de hand van de isoclinen kan direct worden gedemonstreerd welke grenzen de eis van volledige inschakeling der produktiefactoren aan de verhouding van arbeid en kapitaal stelt (zie grafiek 17 en bijv. (1.3.6) en (1.3.7)). Alleen nl. indien het punt, dat de voorraad arbeid en kapitaal in de grafiek aangeeft (beschikbaarheidspunt), tussen de isoclinen ligt, is volledige inschakeling van de produktiefactoren met behulp van de technieken, welke de hellingshoek van de isocline bepalen, mogelijk.

---

1) D.B.J. Schouten, Exacte Economie, p. 179.

Grafiek 17. Isoclinen en isoquanten.



Beziet men nu de behandelde modellen tegen de achtergrond van grafiek 17, dan blijkt het volgende: in het statische model van Leontief ((1.3.6), (1.3.7)) en in de beginperiode van de dynamische modellen van hoofdstuk I ligt het beschikbaarheidspunt tussen de c- en i-isocline. De geschetste toename van arbeid en kapitaal is echter zeer verschillend: in par. 4a werd gesteld, dat de verhouding tussen de hoeveelheden van de produktiefactoren constant blijft, zodat de desbetreffende ontwikkeling van de beschikbaarheidspunten een rechte lijn, gelegen tussen de isoclinen, vormt. De bedoelde ontwikkelingslijnen van Georgescu-Roegen en van Dorfman-Samuelson-Solow bewegen zich daarentegen in het veld tussen de c- en i-isocline. Volgens deze theorieën wordt dus gebruik gemaakt van mogelijkheden, welke er binnen de grens van de volledige inschakeling van de produktiefactoren zijn.

Ook de theorieën, waarin substitueerbaarheid van arbeid en kapitaal wordt verondersteld, zijn in dit schema onder te brengen. In grafiek 17 moet dan één isocline meer worden ingetekend voor de c_1-industrietak. Deze is gelegen tussen die van de i_1- en i_2-industrie. De reeds getekende c-isocline is die van de c_2-industrie. Uit deze grafiek kan dan gemakkelijk worden afgeleid dat in het model van Schouten twee oplossingen technisch niet uitvoerbaar zijn ($c_1 + i_1$ en $c_2 + i_2$). Het beschikbaarheidspunt ligt immers volgens (2.2.1) tussen de c_1- en i_2-isocline en dus niet tussen de c_2- en i_2- of tussen c_1- en i_1-isocline.
In de theorie van Von Neumann blijft de verhouding van arbeid en kapitaal in de tijd gelijk, zodat de ontwikkeling weer te geven is door een rechte vanuit 0, gelegen tussen de i_2- en c_1-isocline. In feite wordt dan van de substitutiemogelijkheden geen gebruik gemaakt, zodat de ontwikkeling gelijk is aan de rechtlijnige ontwikkeling van Leontief.
Indien men bijvoorbeeld in de volkshuishouding de volgende groeiverschijnselen waarneemt:

$$\frac{\Delta\, l\ (t)}{l\ (t)} = \frac{\Delta\, k\ (t)}{k\ (t)} = \frac{\Delta\, c\ (t)}{c\ (t)} = \frac{\Delta\, i\ (t)}{i\ (t)} = 2/3$$

is niet na te gaan of de ontwikkeling verloopt volgens het groeimodel van Von Neumann (cijfervoorbeeld 11) of volgens de lijn van evenwichtige groei van Leontief (met de factorquoten $\alpha_c = 88/98$, $\kappa_c = 59/98$, $\alpha_i = 1/2$, $\kappa_i = 1$).
Over deze vaste verhouding zegt Champernowne[1]: It is an essential property of his (Von Neumann's) equilibrium that the physical outputs of all goods, whether free or not, remain in the same proportions to each other throughout time; so do the physical inputs. Suppose that the system in equilibrium is expanding by k per cent per unit of time; then the input of each good at any moment must be exactly k per cent greater than the input for the previous unit of time".

---

1) D.G. Champernowne, A note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium," Review of Economic Studies, 13, p. 13.

De groei volgens het model van Malinvaud kan daarentegen variëren tussen de isoclinen van c_2 en i_1. In dit model kan dus van de substitueerbaarheid tussen kapitaal en arbeid binnen de gegeven grenzen gebruik gemaakt worden, waarbij dan bij een relatief groter aanbod van arbeid de produktie van de eindprodukten meer volgens de tweede (arbeidsintensieve) en bij een grotere investeringsactiviteit meer volgens de eerste (kapitaalintensieve) techniek zal geschieden.
In de modellen van Marx en Walras wordt door de eis van evenwichtige groei weer meer aansluiting gezocht bij de groeitheorie van Von Neumann, al wordt hierbij niet verondersteld, dat het gehele meerinkomen wordt geinvesteerd.

b) groeifactor

In de dynamische modellen van hoofdstuk I en II kwam de groeivoet naar voren. Deze werd op verschillende wijzen afgeleid om aldus nauwer aan te sluiten bij de gedachtengang en de methode van redenering van de desbetreffende auteur. Toch blijkt zowel in het theoretische gedeelte van de studie als in de getallenvoorbeelden, dat al deze definities in feite steeds hetzelfde uitdrukken, nl. de index van het nationaal inkomen. Een herhaling van de conclusies is dus niet nodig, maar vanwege het speciale verband tussen de modellen van Leontief en Von Neumann, is een vergelijking van de groeifactoren volgens deze theorieën wellicht nuttig.

Leontief

De groeifactor kan worden uitgedrukt in gecumuleerde factorquoten:

$$\rho = 1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} \qquad (1.4a.16)$$

Von Neumann

In hoofdstuk II werd geconstateerd dat het dynamische model van Von Neumann "gebaseerd" is op het statische model van Schouten. Dit laatste systeem kan echter op zijn beurt weer worden gesplitst in enkele Leontief-modellen. Derhalve is het mogelijk de groei in het dynamische stelsel van Von Neumann, waarin substitutie van arbeid en kapitaal mogelijk is, af te leiden uit het dynamische schema van Leontief. Een cijfervoorbeeld moge dit verduidelijken.

Cijfervoorbeeld 13

Gegeven : de directe factorquoten

$\bar{\alpha}_{c_1} = 1/5 \quad \bar{\alpha}_{c_2} = 7/15 \quad \bar{\alpha}_{i_1} = 2/15 \quad \bar{\alpha}_{i_2} = 5/11$

$\bar{\kappa}_{c_1} = 2/5 \quad \bar{\kappa}_{c_2} = 2/15 \quad \bar{\kappa}_{i_1} = 7/15 \quad \bar{\kappa}_{i_2} = 5/16$

$l\ (t_o) = 1400 \qquad k\ (t_o) = 1900$

Oplossing: uit cijfervoorbeeld 10 blijkt, dat de bovengenoemde directe factorquoten de volgende gecumuleerde factorquoten impliceren:

$\alpha_{c_1} = 3/7 \quad \alpha_{c_2} = 1 \quad \alpha_{i_1} = 1/2 \quad \alpha_{i_2} = 150/101$

$\kappa_{c_1} = 15/14 \quad \kappa_{c_2} = 1/2 \quad \kappa_{i_1} = 1 \quad \kappa_{i_2} = 75/101$

in cijfervoorbeeld 11 was de oplossing:

$c_1 = \frac{1250}{3} \quad c_2 = \frac{5750}{3} \quad i_1 = \frac{9500}{3}$ dus

$l_{c_1}\ (t_o) = 750/9 \qquad k_{c_1}\ (t_o) = 1500/9$

$l_{c_2}\ (t_o) = 8050/9 \qquad k_{c_2}\ (t_o) = 2300/9$

$l_{i_1}\ (t_o) = 3800/9 \qquad k_{i_1}\ (t_o) = 13300/9$

Als men thans het model van Von Neumann splitst in twee Leontiefmodellen, ontstaan de combinaties $c_1 + i_1$ en $c_2 + i_1$. Voor beide is, zoals men kan toetsen door toepassing van vergelijking (1.4a.16), de groeifactor gelijk aan 5/3.

In de theorie van Von Neumann is vervolgens afgeleid dat de groeifactor gelijk is aan het grensprodukt van dat intermediaire goed, dat op twee manieren geproduceerd kan worden (2.3a.24). De groeifactor is nl. maximaal, als het de producent, die twee technieken toepast, onverschillig is of hij nog meer van dat intermediaire goed zal voortbrengen met meer van dat goed zelf dan wel met meer van het andere goed[1]. In beide gevallen is "the ratio of revenues to costs" minimaal en de groei maximaal, omdat de producent indifferent is ten opzichte van de toe te passen produktietechniek. Aldus kan de stelling welke Georgescu-Roegen met betrekking tot het Von Neumann's model formuleerde worden geadstrueerd.[2]

c) Het feitelijk rendement van kapitaal

Schouten

In "Exacte Economie" komt Schouten tot een objectieve prijstheorie. Hij concludeert nl.: "De helling van de lijn van de meest efficiente produktiemogelijkheden geeft, evenals die van de klassieke transformatielijnen, de technische substitutiemogelijkheden aan van het ene goed ten opzichte van het andere. Bij het evenwicht moet de prijsverhouding een uitdrukking zijn van deze technische substitutiemogelijkheden ..... Deze kostprijs (de kostprijs van het produkt, dat op twee manieren geproduceerd wordt) moet ook per eenheid produkt gelijk zijn aan de grenskosten van de toegevoegde factor"[3] (bijv. $p_c = \bar{\bar{\kappa}}_c \bar{p}_R$).
Voorts kan men, als het minimum levensonderhoud per arbeider en de vervanging per eenheid kapitaal in alle industrieën gelijk zijn, stellen, dat bij een kapitaalintensieve en arbeidsintensieve techniek van het c-produkt, de prijsverhouding is:

$$\frac{p_i}{p_c} = \frac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \frac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c} .$$

---

1) Zie voor een analoge redenering: D.B.J. Schouten, Exacte Economie, p. 129.

2) Tj. C. Koopmans (ed), Activity Analysis of Production and Allocation, hoofdstuk 4.

3) pag. 129.

Uit het bovenstaande volgt, dat ook het bruto rendement van kapitaal van objectieve coëfficiënten afhankelijk is:

$$\frac{\bar{p}_R}{p_i} = \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c\left(\dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \dfrac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} \qquad \text{(vgl. ook (2.3a.16))}$$

De verhouding tussen de opbrengst van de kapitaaleenheid ($\bar{p}_R$) en de kosten van die eenheid (p_i) is immers de reële beloningsvoet van kapitaal d.i. het bruto feitelijk rendement.
Dit rendement zal in een model, waarin substitutie tussen kapitaal en arbeid mogelijk is, een bepaalde hoogte bereiken. Dàt er een reële beloningsvoet voor kapitaal is, is te verklaren uit de schaarste aan kapitaal, en de produktiviteit van arbeid en kapitaal tezamen. Als nl. kapitaal schaars is en de produktie meer omvat dan voor de minimum behoeften van de arbeiders en de vervanging van verbruikte kapitaaleenheden nodig is, zal aan kapitaal een bepaalde meerwaarde toekomen. Daarom is $\bar{p}_R$ positief en $\bar{p}_R/p_i > 1$. De statische theorie kan echter geen verklaring van de uiteindelijke hoogte van deze meerwaarde geven, zoals deze door het groeiproces bij een stabiele economische ontwikkeling wordt bepaald.

Malinvaud

In het model van Malinvaud werd gesteld dat door uitbreidingsinvesteringen de kapitaalgoederenvoorraad voor de volgende periode groter zal zijn. De zin daarvan is dat daardoor - zo volgt uit de afleidingen van dit dynamische model - ook de produktie in de navolgende periode hoger wordt. Om echter de produktie van investeringsgoederen mogelijk te maken, moet in een bepaalde periode worden gespaard d.w.z. afgezien worden van consumptie. Deze groei van de kapitaalgoederenvoorraad ten gevolge van het afzien van consumptie en het effect van deze extra investeringen kunnen in samenhang met het gewenste rendement van het spaaroffer een verklaring geven van een rationele vraag naar investeringsgoederen (zie ook (2.3b.7)).

Von Neumann

In het model van Von Neumann wordt het onderscheid tussen arbeid en kapitaal vervaagd, zodat in feite van twee soorten kapitaalgoederen kan worden gesproken. In het behandelde model is immers naast de voortbrenging van kapitaaleenheden ook de "produktie" van arbeiders opgenomen. Wordt de vervaardiging van consumptiegoederen uitgebreid, dan zal in de volgende periode het aanbod van arbeiders dienovereenkomstig hoger zijn. Champernowne[1] zegt hierover: "By reducing the role of the worker-consumer to that of a farm animal, he can focus attention on those parts of mechanism determing prices and the rate of interest, which depend on supply conditions alone and not on the tastes of consumers". De produktie, welke niet voor de vervanging van verbruikte produktiefactoren wordt aangewend, wordt hier volledig gebruikt voor de uitbreiding van kapitaal of arbeid. De keuze ten aanzien van de uitbreiding (arbeid of kapitaal) hangt uitsluitend af van de reële beloningsvoet. Derhalve zal alleen dan gelijktijdig de produktie van netto consumptiegoederen én uitbreidingsinvesteringen ter hand worden genomen, als de reële beloningsvoet van beide goederen, gezien als produktiefactoren, gelijk is, d.w.z. als:

$$r = \frac{\bar{p}_L\ (t)}{p_c\ (t)} = \frac{\bar{p}_R\ (t)}{p_i\ (t)} = \frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c\left(\dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \dfrac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} \mp \frac{1}{\bar{\bar{\alpha}}_c} \qquad (2.3a.15)$$

Marx en Walras

Ook in de andere analyses van hoofdstuk II werd uit de prijsvergelijkingen steeds afgeleid dat het rendement gelijk is aan

$$\frac{1}{\bar{\bar{\kappa}}_c\left(\dfrac{\bar{\alpha}_{i_1}}{\bar{\bar{\alpha}}_c} + \dfrac{\bar{\kappa}_{i_1}}{\bar{\bar{\kappa}}_c}\right)} = r \text{ (resp. } \zeta)$$

1) A note on J. v. Neumann's Article ...., p. 12.

In bijna alle gedeelten van hoofdstuk I en II was dit objectief bepaalde rendement van kapitaal echter gelijk aan de groeifactor. Alleen in de modellen van hoofdstuk I par. 4 en van Marx en Walras had ook de consumptieneiging invloed op de toename van de nationale produktie. Gegeven deze consumptieneiging was in hoofdstuk II de groeifactor een positieve functie van het objectief bepaalde rendement van kapitaal.
Veronderstelt men daarentegen complementariteit van de produktiefactoren dan is het rendement juist omgekeerd een functie van de autonoom bepaalde groeivoet van de bevolking. Alleen als het stijgingspercentage van de arbeidende bevolking gegeven is, zijn in dat geval de grootheden van het model te bepalen. De reden hiervan is, dat in het snijpunt van de transformatielijnen van arbeid en kapitaal een oneindig aantal raaklijnen aan het produktiegebied te trekken zijn, zodat de prijsverhouding p_c/p_i niet zonder meer uit de hellingshoek afgeleid kan worden (zie: hoofdstuk I, par. 3: "prijsstructuur"). Een aanvullend gegeven (de autonome bevolkingsaanwas) is nodig om het model af te ronden.

Slotopmerking

In deze studie is een theoretische analyse gegeven van de samenhang tussen de technische coëfficiënten en de prijsverhouding van de eindprodukten, de beloningsvoet van de produktiefactoren, de groeifactor in de volkshuishouding en het feitelijk rendement van kapitaal.
Gedetailleerde aansluiting bij de economische realiteit is niet gezocht, omdat het niet mogelijk is in een wiskundige formulering de ingewikkelde economische realiteit volledig op te nemen. "As we strive for greater rigor and precision in the formulation of postulates and proposition, the inadequacies and lacks of realism of the postulates are thereby made to stand out in stronger relief. As we succeed in recognizing and incorporating one aspect of the real world in our models, our failure to incorporate other aspects becomes more apparent"[1].
In navolging van Schouten (.... wie twijfelt er nog aan .... dat er een alternatieve keuze bestaat tussen arbeids- en kapitaalin-

1) Tj. C. Koopmans, 3 essays ....., p. 126.

tensieve produktiemethoden?)[1], is in deze studie één aspect sterk benadrukt, nl. dat in de moderne economische realiteit de voortbrenging van een bepaald produkt op meerdere manieren kan plaatsvinden. De analyses van het eerste hoofdstuk waren m.n. een voorbereiding op dit thema van het tweede hoofdstuk.
Bovendien werden zowel in het eerste als in het tweede hoofdstuk de dynamische implicaties van statische theorieën nader onderzocht. Daarbij bleek het maatschappelijk economisch ontwikkelingsproces grotendeels door technische coëfficiënten bepaald te zijn. Een eventuele ombuiging van deze materiële ontwikkeling dient dan ook speciaal via de beinvloeding van deze coëfficiënten te geschieden d.w.z. door technische vooruitgang.

---

1) D.B.J. Schouten, De Naamloze Vennootschap, 1959, p. 159.

APPENDIX I

DE LIJN VAN INTERNE LEVERING IN HET STATISCH MODEL VAN LEONTIEF

(Hoofdstuk 1, par. 2)

1. De vergelijkingen (1.1.1) t/m (1.1.3) zijn:

$$\mu_{c_a c_a} c_a + \mu_{c_a c_b} c_b + c_{a\,netto} = c_a \qquad (I,1)$$

$$\mu_{c_b c_a} c_a + \mu_{c_b c_b} c_b + c_{b\,netto} = c_b \qquad (I,2)$$

$$\bar{\alpha}_{c_a} c_a + \bar{\alpha}_{c_b} c_b = \bar{1} \qquad (I,3)$$

Als definitie geldt: $c_a - c_{a\,netto} = c_{a\,verv.}$ (I,4)

$c_b - c_{b\,netto} = c_{b\,verv.}$ (I,5)

Uit (I,1), (I,3) en (I,4) volgt:

$$c_{a\,verv.} = \mu_{c_a c_a} c_a + \mu_{c_a c_b} c_b$$

$$c_{a\,verv.} = \mu_{c_a c_a} \left(\frac{\bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}} - \frac{\bar{\alpha}_{c_b}}{\bar{\alpha}_{c_a}} c_b \right) + \mu_{c_a c_b} c_b$$

$$c_b = \frac{c_{a\,verv.} - \dfrac{\mu_{c_a c_a} \bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}}}{\mu_{c_a c_b} - \dfrac{\bar{\alpha}_{c_b} \mu_{c_a c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}} \qquad (I,6)$$

Uit (I,2), (I,5) en (I,6) kan worden afgeleid:

$$c_{b\,\text{verv.}} = \mu_{c_b\,c_a}\, c_a + \mu_{c_b\,c_b}\, c_b$$

$$c_{b\,\text{verv.}} = \mu_{c_b\,c_a}\left(\frac{\bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}} - \frac{\bar{\alpha}_{c_b}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\, c_b\right) + \mu_{c_b\,c_b}\, c_b$$

$$c_{b\,\text{verv.}} = \frac{\mu_{c_b\,c_a}\,\bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}} + \left(-\frac{\mu_{c_b\,c_a}\,\bar{\alpha}_{c_b}}{\bar{\alpha}_{c_a}} + \mu_{c_b\,c_b}\right)\left(\frac{c_{a\,\text{verv.}} - \dfrac{\mu_{c_a\,c_a}\,\bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}}}{\mu_{c_a\,c_b} - \dfrac{\bar{\alpha}_{c_b}\,\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}}\right)$$

$$c_{b\,\text{verv.}} = \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\,\bar{1} + \left(\frac{\mu_{c_b\,c_b}\,\bar{\alpha}_{c_a} - \mu_{c_b\,c_a}\,\bar{\alpha}_{c_b}}{\mu_{c_a\,c_b}\,\bar{\alpha}_{c_a} - \mu_{c_a\,c_a}\,\bar{\alpha}_{c_b}}\right)\left(c_{a\,\text{verv.}} - \frac{\mu_{c_a\,c_a}\,\bar{1}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\right)$$

$$c_{b\,\text{verv.}} = \frac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\,\bar{1} + \left(\frac{\dfrac{\mu_{c_b\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} - \dfrac{\mu_{c_b\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}}{\dfrac{\mu_{c_a\,c_b}}{\bar{\alpha}_{c_b}} - \dfrac{\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}}\right)\left(c_{a\,\text{verv.}} - \frac{\mu_{c_a\,c_a}}{\bar{\alpha}_{c_a}}\,\bar{1}\right)$$

Substitutie van de vergelijkingen (1.2.9) t/m (1.1.12) levert op:

$$c_{b\ verv.} = 0_{c_b c_a} \bar{l} + \left(\frac{0_{c_b c_b} - 0_{c_b c_a}}{0_{c_a c_b} - 0_{c_a c_a}} \right) \left(c_{a\ verv.} - 0_{c_a c_a} \bar{l} \right) \quad (I,7)$$

Op dezelfde manier kan worden afgeleid:

$$c_{a\ verv.} = 0_{c_a c_a} \bar{l} + \left(\frac{0_{c_a c_b} - 0_{c_a c_a}}{0_{c_b c_b} - 0_{c_b c_a}} \right) \left(c_{b\ verv.} - 0_{c_b c_a} \bar{l} \right) \quad (I,8)$$

Dit zijn dus de formules van het lijnstuk A^1B^1 in grafiek 3. (I,8) geeft bijvoorbeeld aan: het aantal c_a-goederen voor het minimum levensonderhoud van de arbeiders is gelijk aan het aantal eenheden c_a, dat voor onderhoud nodig zou zijn als alle arbeiders in de c_a-industrie werkzaam zouden zijn ($0_{c_a c_a} \bar{l}$), vermeerderd c.q. verminderd met het aantal dat de arbeiders werkzaam in de c_b-industrie, meer c.q. minder nodig hebben. Het laatste gedeelte van de vergelijking is nl. nul als alle arbeidskrachten in de c_a-industrie ingeschakeld zijn ($c_{b\ verv.} = 0_{c_b c_a} \bar{l} = 0$).
Toch moeten er dus, als $0_{c_b c_a} \neq 0$, arbeiders in de c_b-industrie werken. Als één arbeider ingeschakeld wordt in deze industrie zal hij $0_{c_a c_b} - 0_{c_a c_a}$ meer c_a en $0_{c_b c_b} - 0_{c_b c_a}$ meer c_b vragen. Van deze verhouding en het aantal arbeiders van de tweede industrie zal de vervaardiging van $c_{a\ verv.}$ dus mede afhankelijk zijn.

2. Nu moet nog bewezen worden dat de eindpunten van de lijn van interne levering steeds gelegen zijn tussen de lijnen van Hawkins-Simon (zie grafiek 3: A^1 en B^1 liggen tussen M_1 en M_2). Is dit niet het geval dan wordt de netto produktie van één produkt onmogelijk.

Dit kan als volgt worden bewezen:

$$\left.\begin{aligned}\mu_{c_a c_a} c_{a\,\text{verv.}} + \mu_{c_a c_b} c_b &= c_{a\,\text{verv.}} \\ \\ \mu_{c_b c_a} c_{a\,\text{verv.}} + \mu_{c_b c_b} c_b &= c_{b\,\text{verv.}}\end{aligned}\right]\cdot$$

$$\mu_{c_b c_a} c_{a\,\text{verv.}} + \frac{\mu_{c_b c_b}(1 - \mu_{c_a c_a})}{\mu_{c_a c_b}} c_{a\,\text{verv.}} = c_{b\,\text{verv.}}$$

$$\frac{c_{b\,\text{verv.}}}{c_{a\,\text{verv.}}} = \frac{\mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a} + \mu_{c_b c_b}(1 - \mu_{c_a c_a})}{\mu_{c_a c_b}}$$

Te bewijzen is dus nu voor A^1 van grafiek 3:

a) $$\frac{\mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a} + \mu_{c_b c_b}(1 - \mu_{c_a c_a})}{\mu_{c_a c_b}} < \frac{1 - \mu_{c_a c_a}}{\mu_{c_a c_b}} \quad \text{(zie grafiek 1)}$$

Dit volgt direct uit (1.2.5)

b) $$\frac{\mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a} + \mu_{c_b c_b}(1 - \mu_{c_a c_a})}{\mu_{c_a c_b}} > \frac{\mu_{c_b c_a}}{1 - \mu_{c_b c_b}} \quad \text{(zie grafiek 1)}$$

$$\frac{(1-\mu_{c_b c_b})\mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a} + (1-\mu_{c_b c_b})\mu_{c_b c_b}(1-\mu_{c_a c_a}) - \mu_{c_b c_a}\mu_{c_a c_b}}{(1 - \mu_{c_b c_b})\mu_{c_a c_b}} > 0$$

$$\frac{\mu_{c_b c_b}\{(1 - \mu_{c_b c_b})(1 - \mu_{c_a c_a}) - \mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a}\}}{(1 - \mu_{c_b c_b})\mu_{c_a c_b}} > 0$$

Dit geldt omdat: $\mu_{c_b c_b}$, $(1 - \mu_{c_b c_b})$, $\mu_{c_a c_b}$ en

$\{(1 - \mu_{c_b c_b})(1 - \mu_{c_a c_a}) - \mu_{c_a c_b}\mu_{c_b c_a}\} > 0$ zijn.

APPENDIX II

HET PUNT VAN INTERNE LEVERING IN HET UITGEBREIDE STATISCHE MODEL VAN LEONTIEF

(Hoofdstuk I, par. 3)

1. In punt C van grafiek 8 is:

$$\bar{\alpha}_c\, c + \bar{\alpha}_i\, i = \bar{1} \qquad \text{(zie 1.3.3)} \qquad \text{(II,1)}$$

$$\bar{\kappa}_c\, c + \bar{\kappa}_i\, i = k \qquad \text{(zie 1.3.4)} \qquad \text{(II,2)}$$

$$c_{verv.} = \mu_{cc}\, c + \mu_{ci}\, i \qquad \text{(zie 1.3.1)} \qquad \text{(II,3)}$$

$$i_{verv.} = \mu_{ic}\, c + \mu_{ii}\, i \qquad \text{(zie 1.3.2)} \qquad \text{(II,4)}$$

In hoofdstuk I, par. 3 zijn de volgende definities gegeven:

$$0_{cc} = \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c};\ 0_{ci} = \frac{\mu_{ci}}{\bar{\alpha}_i};\ V_{ic} = \frac{\mu_{ic}}{\bar{\kappa}_c};\ V_{ii} = \frac{\mu_{ii}}{\bar{\kappa}_i}$$

Uit (II,1) en (II,3) volgt:

$$c_{verv.} = \mu_{cc}\left(\frac{\bar{1} - \bar{\alpha}_i\, i}{\bar{\alpha}_c}\right) + \mu_{ci}\, i$$

$$c_{verv.} = \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}\,\bar{1} + \left(\frac{\mu_{ci}}{\bar{\alpha}_i} - \frac{\mu_{cc}}{\bar{\alpha}_c}\right)\bar{\alpha}_i\, i$$

$$c_{verv.} = 0_{cc}\ \bar{l} + (0_{ci} - 0_{cc})\ \bar{\alpha}_i\ i \qquad (II,5)$$

Zoveel consumptiegoederen moeten voor het levensmiddelenpakket van de arbeiders geproduceerd worden, als de arbeiders nodig zouden hebben, indien alle in de c-goederenindustrie te werk gesteld zouden zijn, vermeerderd met het aantal dat door de arbeiders in de i-industrie ($\bar{\alpha}_i\ i$) meer gebruikt wordt (per arbeider in de i-industrie is $0_{ci} - 0_{cc}$ meer c nodig).

Op dezelfde wijze kan uit (II,2) en (II,4) worden afgeleid, dat

$$i_{verv.} = V_{ic}\ \bar{k} + (V_{ii} - V_{ic})\ \bar{\kappa}_i\ i \qquad (II,6)$$

Voor deze vergelijking geldt een analoge verklaring.

2. De verhouding tussen $c_{verv.}$ en $i_{verv.}$ is

$$c_{verv.} = 0_{cc}\ \bar{l} + (0_{ci} - 0_{cc})\ \bar{\alpha}_i\ i \qquad (II,5)$$

$$i = \frac{c_{verv.} - 0_{cc}\ \bar{l}}{(0_{ci} - 0_{cc})\ \bar{\alpha}_i}$$

$$i_{verv.} = V_{ic}\ \bar{k} + (V_{ii} - V_{ic})\ \bar{\kappa}_i\ i \qquad (II,6)$$

$$i_{verv.} = V_{ic}\ \bar{k} + \left[\frac{(V_{ii} - V_{ic})\ \bar{\kappa}_i}{(0_{ci} - 0_{cc})\ \bar{\alpha}_i}\right] (c_{verv.} - 0_{cc}\ \bar{l}) \qquad (II,7)$$

Uit de vergelijking (II,7) volgt dat de hoeveelheid investeringsgoederen, welke voor vervanging van de verbruikte kapitaaleenheden nodig is, afhankelijk is van de volgende factoren:
- de vervangingsinvesteringen voor de c-industrie, indien alle kapitaalgoederen in deze industrie ingeschakeld zouden zijn.
- de hoeveelheid $c_{verv.}$ welke de i-industrie nodig heeft.
- het gedeelte dat de i-industrie meer aan vervangingsinvesteringen nodig heeft dan de c-industrie, gewogen met het aantal kapitaaleenheden, nodig voor de produktie van één eenheid,

in verhouding tot het verschil in levensmiddelenpakket in beide industrieën, gewogen met het benodigd aantal arbeiders per eenheid i.

3. Een zeer speciaal geval doet zich voor, als, bij de veronderstelling dat arbeid en kapitaal volledig zijn ingeschakeld, de consumptie-eisen van de arbeiders en de vervangingsinvesteringen vòor de kapitaaleenheden niet afhankelijk zijn van de plaats, waar de produktiefactoren gebruikt worden. Dan kan uit (II,5) en (II,6) worden afgeleid:

$$\frac{c_{verv.}}{i_{verv.}} = \frac{0_{cc}}{V_{ii}} \frac{\bar{l}}{\bar{k}}$$

APPENDIX III

HET OPLOSSEN VAN DE DIFFERENTIE- EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN UIT HOOFDSTUK I

1. De differentievergelijkingen van Leontief

Gegeven:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_c \{l(t+1) - l(t)\} + \alpha_i \{k(t+1) - k(t)\} &= l(t) \quad (1.4a.11) \\ \kappa_c \{l(t+1) - l(t)\} + \kappa_i \{k(t+1) - k(t)\} &= k(t) \quad (1.4a.12) \end{aligned}\right] \begin{matrix} (III,1) \\ (III,2) \end{matrix}$$

voor alle perioden is:

$\dfrac{k(t)}{l(t)}$ constant (zie definitie van evenwichtige groei).

$l(t_o)$ is gegeven.

Oplossing:

$$\text{Stel } \frac{k(t)}{l(t)} = b \qquad (III,3)$$

Substitueer (III,3) in (III,1) en (III,2):

$$(\alpha_c + \alpha_i b)\{l(t+1) - l(t)\} = l(t) \qquad (III,4)$$

$$(\kappa_c + \kappa_i b)\{l(t+1) - l(t)\} = b\, l(t) \qquad (III,5)$$

$$b(\alpha_c + \alpha_i b) = \kappa_c + \kappa_i b$$

$$\alpha_i b^2 + b(\alpha_c - \kappa_i) - \kappa_c = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-\alpha_c + \kappa_i \pm \sqrt{(\alpha_c - \kappa_i)^2 + 4\,\alpha_i\,\kappa_c}}{2\,\alpha_i}$$

$$b_{1,2} = \frac{k\,(t)}{l\,(t)} = \frac{-\alpha_c + \kappa_i \pm \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}}{2\,\alpha_i}$$

Daar echter:

$$\frac{-\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}}{2\,\alpha_i} < 0$$

en een negatieve verhouding tussen de hoeveelheid arbeid en kapitaal niet kan voorkomen, is (zie (1.4a.13)):

$$\frac{l\,(t)}{k\,(t)} = \frac{2\,\alpha_i}{-\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}} = \frac{l\,(t_o)}{k\,(t_o)} \qquad \text{(III,6)}$$

Uit (III,4) volgt:

$$l\,(t+1) = \frac{l\,(t)\,(1 + \alpha_c + \alpha_i\,b)}{\alpha_c + \alpha_i\,b} = l\,(t)\left(1 + \frac{1}{\alpha_c + \alpha_i\,b}\right)$$

$$l\,(t+1) = l\,(t)\left[1 + \frac{2}{\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}}\right]$$

Vermenigvuldigt men de teller en noemer van de breuk met

$$\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\,(\alpha_c\,\kappa_i - \alpha_i\,\kappa_c)}$$

dan wordt:

$$l\ (t+1) = l\ (t) \left[1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} \right]$$

dus (zie (1.4a.16))

$$l\ (t) = l\ (t_o) \left[1 + \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c)} \right]^t \qquad \text{(III,7)}$$

Langs dezelfde weg kan (1.4a.17) worden afgeleid.

2. De differentiaalvergelijkingen van Georgescu-Roegen

Gegeven:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_c \frac{dl}{dt} + \alpha_i \frac{dk}{dt} = l\ (t) && \text{(zie (1.4b.13))} \\ &\kappa_c \frac{dl}{dt} + \kappa_i \frac{dk}{dt} = k\ (t) && \text{(zie (1.4b.14))} \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} &\text{(III,8)} \\ &\text{(III,9)} \end{aligned}$$

$\bar{l}\ (t_o)$; $\bar{k}\ (t_o)$

Oplossing:
Vermenigvuldig (III,8) met κ_i en (III,9) met α_i en trek daarna de laatste vergelijking van de eerste af:

$$(\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c) \frac{dl}{dt} = \kappa_i\ l\ (t) - \alpha_i\ k\ (t)$$

$$k\ (t) = - \frac{\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c}{\alpha_i} \frac{dl}{dt} + \frac{\kappa_i}{\alpha_i} l\ (t) \qquad \text{(III,10)}$$

Differentieren van (III,10) geeft:

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{\alpha_c\ \kappa_i - \alpha_i\ \kappa_c}{\alpha_i} \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \frac{dl}{dt} \qquad \text{(III,11)}$$

Substitueer (III,11) in (III,8):

$$- (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c) \frac{d^2 l}{dt^2} + (\alpha_c + \kappa_i) \frac{dl}{dt} - l\ (t) = 0 \qquad \text{(III,12)}$$

Stel $l\ (t) = e^{\rho t}$, dan is $\frac{dl}{dt} = \rho e^{\rho t}$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \rho^2 e^{\rho t}$$

$$- (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c) \rho^2 e^{\rho t} + (\alpha_c + \kappa_i) \rho e^{\rho t} - e^{\rho t} = 0$$

$$(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c) \rho^2 - (\alpha_c + \kappa_i) \rho + 1 = 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha_c + \kappa_i \pm \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4\ (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\ (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)} \qquad \text{(III,13)}$$

ρ_1 en ρ_2 zijn de wortels van vierkantsvergelijking. Dan zijn de oplossingen van (III,12):

$$l\ (t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} \qquad \text{(III,14)}$$

dus $\frac{dl}{dt} = A_1 \rho_1 e^{\rho_1 t} + A_2 \rho_2 e^{\rho_2 t}$

Uit (III,10) volgt nu:

$$k\ (t) = - \frac{\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c}{\alpha_i} \left(A_1 \rho_1 e^{\rho_1 t} + A_2 \rho_2 e^{\rho_2 t} \right) +$$

$$\frac{\kappa_i}{\alpha_i} \left(A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} \right)$$

$$k(t) = \frac{-(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)\rho_1 + \kappa_i}{\alpha_i} A_1 e^{\rho_1 t} +$$

$$\frac{-(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)\rho_2 + \kappa_i}{\alpha_i} A_2 e^{\rho_2 t} \qquad \text{(III,15)}$$

In periode t = 0 zijn de hoeveelheden arbeid en kapitaal $\bar{l}(t_o)$ en $\bar{k}(t_o)$, bekend. Als t = 0 worden (III,14) en (III,15)

$$\left.\begin{aligned} & A_1 + A_2 = \bar{l}(t_o) \\ & \frac{-(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)\rho_1 + \kappa_i}{\alpha_i} A_1 + \\ & \quad \frac{-(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)\rho_2 + \kappa_i}{\alpha_i} A_2 = \bar{k}(t_o) \end{aligned}\right]$$

In samenhang met (III,13):

$$\left.\begin{aligned} & A_1 + A_2 = \bar{l}(t_o) \\ & \frac{\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\alpha_i} A_1 + \frac{-2\kappa_i}{2\alpha_i} A_1 + \\ & \quad \frac{\alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\alpha_i} A_2 + \frac{-2\kappa_i}{2\alpha_i} A_2 = -\bar{k}(t_o) \end{aligned}\right]$$

$$\frac{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\alpha_i} A_1 +$$

$$\frac{\alpha_c - \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\alpha_i} \{\bar{l}(t_o) - A_1\} = -\bar{k}(t_o)$$

$$A_1 \frac{\sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{\alpha_i} =$$

$$- 1 (t_o) \frac{\alpha_c - \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2 \alpha_i} - k (t_o)$$

$$A_1 = \frac{\{- \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\} \bar{l} (t_o) - 2 \alpha_i \bar{k} (t_o)}{2 \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}} \tag{III,16}$$

$$A_2 = \frac{\{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\} \bar{l} (t_o) + 2 \alpha_i \bar{k} (t_o)}{2 \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}} \tag{III,17}$$

In de vergelijkingen (III,13), (III,16) en (III,17) zijn dus de grootheden van (1.4b.14) gegeven. Voor (1.4b.15) geldt dat:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{- (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c) \rho_1 + \kappa_i}{\alpha_i} A_1 \\ B_2 &= \frac{- (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c) \rho_2 + \kappa_i}{\alpha_i} A_2 \end{aligned}\right] \quad \text{zie (III,15)}$$

$$B_1 = \frac{- \alpha_c + \kappa_i - \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2 \alpha_i} \times$$

$$\frac{\{- \alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_i + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\} \bar{l} (t_o) - 2 \alpha_i \bar{k} (t_o)}{2 \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4 (\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}$$

$$B_2 = \frac{-\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}{2\alpha_i} \times$$

$$\frac{\{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\}\,\bar{l}(t_o) + 2\alpha_i\,\bar{k}(t_o)}{2\sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}$$

$$B_1 = \frac{\{\alpha_c - \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\}\,\bar{k}(t_o) - 2\kappa_c\,\bar{l}(t_o)}{2\sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}$$

(III,18)

$$B_2 = \frac{\{-\alpha_c + \kappa_i + \sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}\}\,\bar{k}(t_o) + 2\kappa_c\,\bar{l}(t_o)}{2\sqrt{(\alpha_c + \kappa_i)^2 - 4(\alpha_c \kappa_i - \alpha_i \kappa_c)}}$$

(III,19)

LIJST VAN SYMBOLEN

a) Coëfficiënten

$\bar{\alpha}$ = directe arbeidsquote
α = gecumuleerde arbeidsquote
$\bar{\hat{\alpha}}$ = directe marginale arbeidsquote
$\hat{\alpha}$ = gecumuleerde marginale arbeidsquote
$\bar{\kappa}$ = directe kapitaalquote
κ = gecumuleerde kapitaalquote
$\bar{\hat{\kappa}}$ = directe marginale kapitaalquote
$\hat{\kappa}$ = gecumuleerde marginale kapitaalquote
de suffices hebben betrekking op de industrietak, bijvoorbeeld $\bar{\alpha}_{c_a}$ = de directe arbeidsquote van de c_a-industrietak
μ = materiaalquote
de eerste suffix is voor de producerende, de tweede voor de verbruikende industrietak, bijvoorbeeld
$\mu_{c_a c_b}$: de hoeveelheid materiaal, geproduceerd door de c_a-industrietak ten behoeve van de c_b-industrietak per eenheid c_b
ρ = groeifactor
γ = gemiddelde consumptiequote
γ_R = consumptiequote van de kapitaaleigenaren.

b) Volumina

c = bruto consumptievolume
i = bruto investeringsvolume
a en b als suffix geven een soort goed aan; 1 en 2 de techniek, volgens welke het goed geproduceerd wordt
c_{netto} = consumptievolume, na aftrek van de goederen voor het minimum levensonderhoud van de arbeiders
i_{netto} = volume netto-investeringsgoederen
$c_{verv.}$ = consumptievolume, bestemd voor het levensonderhoud van de arbeiders

$i_{verv.}$	= volume van vervangingsinvesteringen
$\bar{l}$	= beschikbare hoeveelheid arbeid
l	= gevraagde hoeveelheid arbeid
$\bar{k}$	= beschikbare hoeveelheid kapitaal
k	= gevraagde hoeveelheid kapitaal
O	= onderhoudspakket van één arbeider
V	= vervangingsinvesteringen per verbruikte kapitaaleenheid

eerste suffix van 0 en V heeft betrekking op de leverende, het tweede op de verbruikende industrie, bijvoorbeeld O_{ci} = onderhoudspakket, bestaande uit c-goederen, voor de arbeiders van de i-industrie.

c) Prijzen

$\bar{p}_L$	= totale beloningsvoet van de produktiefactor arbeid (bruto-loon); het suffix duidt op de industrie, waar de arbeider werkt
$\bar{p}_R$	= totale beloningsvoet van de produktiefactor kapitaal
p_L	= netto beloningsvoet van arbeid (meerwaardeloon)
p_R	= netto beloningsvoet van kapitaal
p_c	= prijs van consumptiegoederen
p_i	= prijs van investeringsgoederen
$\frac{\bar{p}_R}{p_i}$	= bruto feitelijk rendement
r	= bruto feitelijk rendement
r^*	= bruto discontovoet of gewenst rendement
$\zeta - 1$	= winstopslag (Marx)
$r - 1$	= netto feitelijk rendement

d) Waardebedragen

L	= totale loonsom
Z	= winstsom
D	= waarde van verbruikte kapitaaleenheden

STELLINGEN

I De groeifactor, welke Von Neumann afleidt, is gelijk aan het grensprodukt van het goed, dat op meerdere manieren geproduceerd kan worden (Review of Economic Studies, jaarg. 13, pag. 1 - 9).

II Het door Georgescu-Roegen in hoofdstuk V van "Activity Analysis of Production and Allocation (ed. Tj.C. Koopmans)", ontwikkeld dynamisch evenwicht is stabiel als het produktieproces van de consumptiegoederen relatief kapitaalintensief en van de investeringsgoederen relatief arbeidsintensief is. Het is daarentegen onstabiel als de technische verhouding van de produktieprocessen zodanig is dat voor consumptiegoederen relatief meer arbeid en voor investeringsgoederen relatief meer kapitaal nodig is.

III Het in één model samenbrengen, kwantificeren en verifiëren van de belangrijkste factoren welke het totale bedrijfseconomische gebeuren in een onderneming verklaren, is momenteel veelal niet mogelijk. Wel kan men dit voorbereiden door deel-modellen samen te stellen, op elkaar af te stemmen en de data van het ene model als variabelen in het andere op te nemen.

IV Indien men de parameters van de learning-curve statistisch wil toetsen, dienen de schattingen van deze parameters op niet-cumulatieve gegevens te zijn gebaseerd.

V In het Centraal Economisch Plan 1961 wordt berekend dat één procent meer werkgelegenheid in de jaren 1950-1956 drie procent en in de jaren 1954-1960 vier procent meer produktie heeft opgeroepen. Nu in het plan voor 1961 de factor op vier wordt gesteld, is een verdediging van de aanname dringend nodig m.n. omdat 1961 gelegen is in de volgende periode.

VI In de huidige loonpolitiek wordt niet op passende wijze rekening gehouden met de regionale verschillen op de arbeidsmarkt.

VII Voor de discussie over de waardevaste pensioenen moet nu reeds onderzocht worden in welke mate, onder de werking van het kapitaaldekkingstelsel, een tijdens actieve diensttijd opgebouwd ouderdomspensioen gedurende het uitkeringstijdvak moet worden verhoogd om de tijdens de opbouw opgetreden waardevermindering op te heffen.

VIII Bij het onderling doorberekenen van de kosten van algemene diensten kan met vrucht gebruik worden gemaakt van de matrix-methode. Op deze wijze wordt de onderlinge samenhang van deze diensten systematisch naar voren gebracht.

IX Indien men in een rentabiliteitsberekening, opgezet voor de vergelijking van de door een bepaalde onderneming behaalde resultaten in verschillende perioden, de winst na belastingen opneemt, dienen de belastingvoordelen uit hoofde van vervroegde afschrijvingen en investeringsaftrek gelijkmatig aan alle perioden te worden toegerekend.

X In de reglementen van de bedrijfspensioenfondsen dient meer individuele vrijheid te worden gegeven ten aanzien van het moment van pensionering wegens ouderdom. De uniforme pensioneringsleeftijd moet dientengevolge vervallen.

XI Een artsentarief , afgestemd op het inkomen van de patiënt, is in de huidige tijd niet meer te verdedigen.

XII Na het verschijnen van de publikaties over het verband tussen roken en longkanker, is het presenteren van sigaretten in strijd met de wellevendheid.